
**TEOREMA GENERAL
DE LA FACTORIZACIÓN DE CORDERO***Lic. Ronald Cordero Méndez**Dirección electrónica: ronaldcome@gmail.com***RESUMEN**

El artículo contiene un teorema que es el resultado del seguimiento de Los Teoremas de La Factorización de Cordero- Trabajo de investigación publicado en la Revista El Labrador de la Universidad Internacional San Isidro Labrador (UISIL) y publicado en la Editorial Generis Publishing como un libro que se titula: “Los Teoremas de La Factorización de Cordero en El Conjunto de Los Números Enteros”. El Teorema permite factorizar en dos factores, los números de la forma $r^2n^2 + r(r - 2)n + pr^2 - r + 1$, con $r \in \mathbb{N}$ y $p \in \{2,3,5,11,17,41\}$. Agregado a lo anterior utilizaremos el Algoritmo de Cordero para factorizar completamente números de la forma $r^2n^2 + r(r - 2)n + pr^2 - r + 1$, con $r \in \mathbb{N}$ y $p \in \{2,3,5,11,17,41\}$ y que es propiedad intelectual del autor de este artículo.

PALABRAS CLAVES.

Teorema, números primos, factores, polinomios, números compuestos, procedimiento.

ABSTRACT

The article contains a theorem that is the result of the follow-up of Cordero's Factorization Theorems- Research work published in the El Labrador Magazine of the San Isidro Labrador International University (UISIL) and published in Generis Publishing as a book that It is entitled: "The Theorems of the Factorization of Cordero in the Set of Integers". The Theorem allows factoring into two factors, numbers of the form $r^2n^2 + r(r - 2)n + pr^2 - r + 1$, with $r \in \mathbb{N}$ and $p \in \{2,3,5,11,17,41\}$. Added to the above we will use the Algorithm to completely factorize numbers of the form $r^2n^2 + r(r - 2)n + pr^2 - r + 1$, with $r \in \mathbb{N}$ and $p \in \{2,3,5,11,17,41\}$ and which is the intellectual property of the author of this article.

KEYWORDS.

Theorem, prime numbers, factors, polynomials, composite numbers, procedure.

1. INTRODUCCIÓN.

La factorización de números enteros es un problema no resuelto de la informática y de la matemática. Factorizar un número entero en el tiempo polinómico por un ordenador clásico no es posible.

Cuando los números enteros son muy grandes (de más de 100 dígitos) no existe un algoritmo eficiente de factorización. Se ha intentado resolver el difícil problema utilizando curvas elípticas, computación cuántica y teoría algebraica de números.

Los números compuestos más difíciles de factorizar son los biprimos o semiprimos cuando ambos factores son muy grandes y además que ambos factores no estén demasiado cerca uno del otro (puesto que se podría utilizar el método de factorización de Fermat). Por tal razón son utilizados en la seguridad informática. El semiprimo más grande factorizado en febrero del 2020 fue el RSA-250, un número de 829 bits con 250 dígitos decimales. El tiempo de cálculo fue de aproximadamente 2700 años de núcleo computación con Intel Xeon Gold 6130 a 2,1 GHz.

Lo que si se sabe es que averiguar si un número es primo o compuesto es más fácil que el problema de factorizar y principalmente los biprimos. El problema compuesto/primo se puede resolver en un tiempo polinomial con la prueba de primalidad AKS. La facilidad de las pruebas o test de primalidad son una parte crucial del algoritmo RSA.

2. TEOREMA GENERAL DE LA FACTORIZACIÓN DE CORDERO.

El teorema que se publica en este artículo tiene como objetivo factorizar números enteros de la forma $r^2n^2 + r(r - 2)n + pr^2 - r + 1$, con $r, n \in \mathbb{Z}$ y $p \in \{2, 3, 5, 11, 17, 41\}$.

2.1 TEOREMA GENERAL DE LA FACTORIZACIÓN DE CORDERO.

Sea $r, s, x, T \in \mathbb{Z}, s \neq 0, r \neq 0$ y $p \in \{2, 3, 5, 11, 17, 41\}$.

I. Si

$$n = \frac{s((r-1)s+r)x^2 + ((r-1)s^2 - (r-2)s - r)x + s((r-1)s+r)p - (r-1)s}{r} + [s^2x^2 + s(s-2)x + ps^2 - s + 1] * T$$

entonces $r^2n^2 + r(r - 2)n + pr^2 - r + 1$ es compuesto y dos de sus factores tienen la forma:

$$f_1 = s^2x^2 + s(s - 2)x + ps^2 - s + 1$$

$$f_2 = f_1 r^2 T^2 + r(2\beta + r - 2)T + ((r - 1)s + r)^2 x^2 + ((r - 1)s + r)((r - 1)s - r + 2)x + p((r - 1)s + r)^2 - (r - 1)((r - 1)s + r) + (r - 1)^2$$

donde $\beta = s((r - 1)s + r)x^2 + ((r - 1)s^2 - (r - 2)s - r)x + s((r - 1)s + r)p - (r - 1)s$

II. Si

$$n = \frac{(r - 1)x^2 + x + (p - 1)(r - 1)}{r} + (x^2 - x + p) * T$$

entonces $r^2 n^2 + r * (r - 2)n + pr^2 - r + 1$ es compuesto y dos de sus factores tienen la forma:

$$f_1 = x^2 - x + p$$

$$f_2 = f_1 r^2 T^2 + r(2\beta + r - 2)T + (r - 1)^2 x^2 + (r^2 - 1)x + p(r - 1)^2 + r$$

donde $\beta = (r - 1)x^2 + x + (p - 1)(r - 1)$

2.1.1 Aplicación

Sea $r = 3, p = 41, s = 2, T = 3, x = 4$

$$n = \frac{s((r - 1)s + r)x^2 + ((r - 1)s^2 - (r - 2)s - r)x + s((r - 1)s + r)p - (r - 1)s}{r}$$

$$+ [s^2 x^2 + s(s - 2)x + ps^2 - s + 1] * T$$

$$n = \frac{14x^2 + 3x + 570}{3} + [4x^2 + 163] * 3$$

$$n = \frac{806}{3} + 227 * 3$$

$$n = \frac{2849}{3}$$

El polinomio a evaluar es:

$$p(n) = r^2 n^2 + r * (r - 2)n + pr^2 - r + 1 = 9n^2 + 3n + 367$$

$$p \left(\frac{2849}{3} \right) = 9 \left(\frac{2849}{3} \right)^2 + 3 * \left(\frac{2849}{3} \right) + 367 = 8120017 = 227 * 35771$$

El factor 35771 se puede encontrar por división (como ya conocemos el factor 227 puesto que es parte de n). Pero también hay una fórmula para encontrarlo, pero por su dificultad es poco utilizada).

La fórmula para encontrar el factor f_2 es:

$$f_2 = f_1 r^2 T^2 + r(2\beta + r - 2)T + ((r - 1)s + r)^2 x^2 + ((r - 1)s + r)((r - 1)s - r + 2)x + p((r - 1)s + r)^2 - (r - 1)((r - 1)s + r) + (r - 1)^2$$

$$f_2 = 227 * 9 * 9 + 3(2 * 806 + 3 - 2) * 3 + 49 * 16 + 7 * 3 * 4 + 41 * 49 - 2 * 7 + 4 = 35771$$

Para probar la primalidad de estos dos factores utilizamos el Algoritmo de Cordero con $n = \frac{2849}{3}$ y $r = 3, p = 41$

Obtenemos: $(T_\phi, \phi) = (45, 403)$ y como hay solamente un par ordenado entonces ambos factores son número primos.

$$8120017 = 227 * 35771$$

Es su factorización completa.

2.1.2 Aplicación 2

Sea $r = 16, p = 17, s = 8, T = 2, x = -1$

$$n = \frac{s((r - 1)s + r)x^2 + ((r - 1)s^2 - (r - 2)s - r)x + s((r - 1)s + r)p - (r - 1)s}{r} + [s^2x^2 + s(s - 2)x + ps^2 - s + 1] * T$$

$$n = \frac{1088x^2 + 832x + 18376}{16} + [64x^2 + 48x + 1081] * 2$$

$$n = \frac{2329}{2} + 1097 * 2$$

$$n = \frac{6717}{2}$$

El polinomio a evaluar es:

$$p(n) = r^2n^2 + r * (r - 2)n + pr^2 - r + 1 = 256n^2 + 224n + 4337$$

$$p\left(\frac{6717}{2}\right) = 256\left(\frac{6717}{2}\right)^2 + 224 * \left(\frac{6717}{2}\right) + 4337 = 2888314337 = 1097 * 2632921$$

Para probar la primalidad de estos dos factores utilizamos el Algoritmo de Cordero para factorizar números de la forma $r^2n^2 + r * (r - 2)n + pr^2 - r + 1$ con $n = \frac{6717}{2}$ y $r = 16$, $p = 17$.

ALGORITMO PARA FACTORIZAR COMPLETAMENTE

NÚMEROS DE LA FORMA

$$r^2n^2 + r(r - 2)n + pr^2 - r + 1$$

Sea $n, r \in \mathbb{N}, p \in \{2, 3, 5, 11, 17, 41\}$ con

$$2(1 - r) \leq T_\phi \leq \left\lfloor \frac{-(8p - 2n - 3)r + 4p - 3 + 2\sqrt{r^2n^2 + r(r - 2)n + pr^2 - r + 1}}{4p - 1} \right\rfloor, T_\phi \in \mathbb{Z}$$

$$\phi = \sqrt{(1 - 4p)T_\phi^2 + 2((2n + 3 - 8p)r + 4p - 3)T_\phi + (r - 1)^2 + 4(2r - 1)((n + 1 - 2p)r + p - 1)}$$

- I. Si existe un T_ϕ dentro del intervalo dado tal que $\phi \in \mathbb{N}$ entonces $r^2n^2 + r(r - 2)n + pr^2 - r + 1$ es un número compuesto, caso contrario $r^2n^2 + r(r - 2)n + pr^2 - r + 1$ es un número primo.
- II. Si $r^2n^2 + r(r - 2)n + pr^2 - r + 1$ es un número compuesto con $(T_\phi, \phi), T_\phi \in \mathbb{Z}, \phi \in \mathbb{Z}$ y $\frac{r-1+T_\phi+\phi}{2(T_\phi+2r-1)} = \frac{t}{b}$ con t y b primos entre sí entonces $t^2 - tb + pb^2$ es un factor de $r^2n^2 + r(r - 2)n + pr^2 - r + 1$.

NOTA:

Para el caso $r = 1$ se puede utilizar $0 \leq T_\emptyset \leq \left\lfloor \frac{4(n-p)}{4p-1} \right\rfloor$

ALGORITMO DE CORDERO

PARA FACTORIZAR COMPLETAMENTE NÚMEROS DE LA FORMA

$$r^2n^2 + r(r - 2)n + pr^2 - r + 1$$

n/p/r/	T ϕ	ϕ
3358,50	3177	340,2116988	0
17	3176	574,9582594	1
16	3175	738,4280601	2
	3174	871,6885912	3
2888314337	3173	987,0521769	4
	3172	1090,215116	5
	3171	1184,369875	6
	3170	1271,51917	7
	3169	1353,017369	8
	3168	1429,831109	9
	3167	1502,678941	10
	3166	1572,112273	11
	3165	1638,565226	12
	3164	1702,386854	13
	3163	1763,862806	14
	3162	1823,230375	15
	3161	1880,689235	16
	3160	1936,409306	17
	3159	1990,536611	18
	3158	2043,197739	19
	3157	2094,503282	20

$$\phi = \sqrt{(1-4p)T_\phi^2 + 2((2n+3-8p)r+4p-3)T_\phi + (r-1)^2 + 4(2r-1)((n+1-2p)r+p-1)}$$

$$\frac{r-1+T_\phi \pm \phi}{2(T+2r-1)} = \frac{t}{b}$$

$$t^2 - tb + pb^2$$

$$r^2n^2 + r(r - 2)n + pr^2 - r + 1$$

$$2(1-r) \leq T_\phi \leq \frac{-((8p-2n-3)r+4p-3) + \sqrt{((8p-2n-3)r+4p-3)^2 + (4p-1)((1-r)^2 - 4(2r-1)((2p-n-1)r-p+1))}}{4p-1} T_\phi \in \mathbb{Z}$$

PARTE DEL ALGORITMO DONDE SE LOCALIZA (T_ϕ, ϕ) donde ambos son números naturales. (son los que se utilizan para encontrar los factores de 2888314337.

3107	3851,03155	70
3106	3877,61486	71
3105	3904	72
3104	3930,190962	73
3103	3956,191603	74
3102	3982,00565	75
3101	4007,63671	76
3100	4033,088271	77

Obtenemos: $(T_\phi, \phi) = (3105, 3904)$ y como hay solamente un par ordenado entonces ambos factores son número primos.

Para recordar el Algoritmo de Cordero. Los factores se obtienen de la siguiente manera;

$$\frac{r - 1 + T_\phi + \phi}{2(T_\phi + 2r - 1)} = \frac{16 - 1 + 3105 + 3904}{2(3105 + 2 * 16 - 1)} = \frac{439}{392}$$

Por lo que un factor primo es: $439^2 - 439 * 392 + 17 * 392^2 = 2632921$

$$\frac{r - 1 + T_\phi - \phi}{2(T_\phi + 2r - 1)} = \frac{16 - 1 + 3105 - 3904}{2(3105 + 2 * 16 - 1)} = \frac{-1}{8}$$

Por lo que el otro factor primo es: $(-1)^2 - (-1) * 8 + 17 * 8^2 = 1097$

La factorización completa de $2888314337 = 1097 * 26322921$.

2.1.3 Aplicación 3.

Sea $r = 4, p = 11, s = 6, T = 2, x = -8$

$$n = \frac{s((r-1)s+r)x^2 + ((r-1)s^2 - (r-2)s - r)x + s((r-1)s+r)p - (r-1)s}{r}$$

$$+ [s^2x^2 + s(s-2)x + ps^2 - s + 1] * T$$

$$n = \frac{132x^2 + 92x + 1434}{4} + [36x^2 + 24x + 391] * 5$$

$$n = \frac{4573}{2} + 2503 * 2$$

$$n = \frac{14585}{2}$$

El polinomio a evaluar es:

$$p(n) = r^2n^2 + r * (r - 2)n + pr^2 - r + 1 = 16n^2 + 8n + 173$$

$$p\left(\frac{14585}{2}\right) = 16\left(\frac{14585}{2}\right)^2 + 8 * \left(\frac{14585}{2}\right) + 173 = 850947413 = 2503 * 339971$$

Para probar la primalidad de estos dos factores utilizamos el Algoritmo de Cordero con $n = \frac{14585}{2}$ y $r = 4, p = 11$

$$850947413 = 2503 * 339971$$

Obtenemos varios pares ordenados:

T_ϕ	ϕ
413	6436
2402	5617
2696	1109

Para recordar el Algoritmo. Los factores se obtienen de la siguiente manera;

$$\frac{r - 1 + T_\phi + \phi}{2(T_\phi + 2r - 1)} = \frac{4 - 1 + 413 + 6436}{2(413 + 2 * 4 - 1)} = \frac{571}{70}$$

Por lo que un factor es: $571^2 - 571 * 70 + 11 * 70^2 = 339971$

$$\frac{r - 1 + T_\phi - \phi}{2(T_\phi + 2r - 1)} = \frac{4 - 1 + 413 - 6436}{2(413 + 2 * 4 - 1)} = \frac{-43}{6}$$

Por lo que otro factor es: $43^2 + 43 * 6 + 11 * 6^2 = 2503$. Pero estos factores ya los conocemos. Probaremos con los otros pares ordenados.

$$\frac{r - 1 + T_\phi + \phi}{2(T_\phi + 2r - 1)} = \frac{4 - 1 + 2402 + 5617}{2(2402 + 2 * 4 - 1)} = \frac{1337}{803}$$

Por lo que un factor es: $1337^2 - 1337 * 803 + 11 * 803^2 = 7806857$

Como este factor no lo conocemos:

$$850947413 = 7806857 * 109$$

Dividiendo entre los factores anteriores:

$$850947413 = 3119 * 2503 * 109$$

Y, por último:

$$\frac{r - 1 + T_\phi - \phi}{2(T_\phi + 2r - 1)} = \frac{4 - 1 + 2402 - 5617}{2(2402 + 2 * 4 - 1)} = \frac{-2}{3}$$

Por lo que un factor es: $2^2 + 2 * 3 + 11 * 3^2 = 109$

Concluimos que la factorización completa de:

$$850947413 = 3119 * 2503 * 109$$

No es necesario analizar el otro par ordenado.

2.1.4 Aplicación 4.

Sea $r = 1, p = 41, s = 47, T = 32, x = -5$

$$n = \frac{s((r-1)s+r)x^2 + ((r-1)s^2 - (r-2)s - r)x + s((r-1)s+r)p - (r-1)s}{r} + [s^2x^2 + s(s-2)x + ps^2 - s + 1] * T$$

$$n = 47x^2 + 46x + 1927 + [2209x^2 + 2115x + 90523] * 32$$

$$n = 2872 + 135173 * 32 = 4328408$$

El polinomio a evaluar es:

$$p(n) = r^2n^2 + r * (r-2)n + pr^2 - r + 1 = n^2 - n + 41 =$$

$$4328408^2 - 4328408 + 41 = 18\ 735\ 111\ 486\ 097$$

$$= 135173 * 138600989$$

Para probar la primalidad de estos dos factores utilizamos el Algoritmo de Cordero con $n = 4328408$ y $r = 1, p = 41$

Obtenemos el par ordenado y posiblemente hallan otros, pero con este es suficiente para factorizar completamente a $18\ 735\ 111\ 486\ 097$.

T_ϕ	ϕ
1391	154223

Para recordar el test de primalidad. Los factores se obtienen de la siguiente manera;

$$\frac{r-1 + T_\phi + \phi}{2(T_\phi + 2r-1)} = \frac{1-1 + 1391 + 154223}{2(1391 + 2*1-1)} = \frac{2683}{48}$$

Por lo que un factor es: $2683^2 - 2683 * 48 + 41 * 48^2 = 7164169$

$$\frac{r-1 + T_\phi - \phi}{2(T_\phi + 2r-1)} = \frac{1-1 + 1391 - 154223}{2(1391 + 2*1-1)} = \frac{-1592}{29}$$

Por lo que otro factor es: $1592^2 + 1592 * 29 + 41 * 29^2 = 2615113$.

Dividiendo entre los factores anteriores:

$$7164169 = 53 * 135173 \quad \text{y} \quad 2615113 \text{ primo.}$$

Luego:

$$4328408^2 - 4328408 + 41 = 18\,735\,111\,486\,097$$

$$= 135173 * 53 * 2615113$$

La cual es su factorización completa.

2.1.5 Aplicación 5.

Sea $r = 2, p = 11, s = 3, T = 5, x = -4$

$$n = \frac{s((r-1)s+r)x^2 + ((r-1)s^2 - (r-2)s - r)x + s((r-1)s+r)p - (r-1)s}{r} + [s^2x^2 + s(s-2)x + ps^2 - s + 1] * T$$

$$n = \frac{15x^2 + 7x + 162}{2} + [9x^2 + 3x + 97] * 5$$

$$n = 187 + 229 * 5 = 1332$$

El polinomio a evaluar es:

$$p(n) = r^2n^2 + r * (r - 2)n + pr^2 - r + 1 = 4n^2 + 43 =$$

$$= 7096939 = 229 * 30991$$

Para probar la primalidad de estos dos factores utilizamos el Algoritmo de Cordero con $n = 1332$ y $r = 2, p = 11$

Obtenemos los pares ordenados:

T_ϕ	ϕ
244	93
154	783
102	803

Los factores se obtienen de la siguiente manera;

$$\frac{r - 1 + T_\phi + \phi}{2(T_\phi + 2r - 1)} = \frac{2 - 1 + 244 + 93}{2(244 + 3)} = \frac{13}{19}$$

Por lo que un factor es: $13^2 - 13 * 19 + 11 * 19^2 = 3893$ (factor encontrado con el Algoritmo de Cordero), si los dividimos entre el factor 229 obtenido con el teorema, $3893 = 229 * 17$ por lo que concluimos que $30991 = 17 * 1823$

$$\frac{r - 1 + T_\phi - \phi}{2(T_\emptyset + 2r - 1)} = \frac{2 - 1 + 244 - 93}{2(244 + 3)} = \frac{4}{13}$$

Por lo que otro factor es: $4^2 - 4 * 13 + 11 * 13^2 = 1823$ (factor encontrado con el Algoritmo de Cordero). Pero 1823 no es divisible por 229, 30991 o 17. Por lo que se concluye que es número primo.

$$\frac{r - 1 + T_\phi + \phi}{2(T_\emptyset + 2r - 1)} = \frac{2 - 1 + 154 + 783}{2(154 + 3)} = \frac{469}{157}$$

Por lo que otro factor es: $469^2 - 469 * 157 + 11 * 157^2 = 417467$ (factor encontrado con el Algoritmo de Cordero). Pero 417467 es divisible por 229. Esto es $417467 = 229 * 1823$.

$$\frac{r - 1 + T_\phi - \phi}{2(T_\emptyset + 2r - 1)} = \frac{2 - 1 + 154 - 783}{2(154 + 3)} = -2$$

Por lo que un factor es: $2^2 + 2 * 1 + 11 * 1^2 = 17$.

Luego:

$$7096939 = 229 * 30991 = 229 * 17 * 1823$$

Y es su factorización completa.

2.1.6 Aplicación 6

Sea $r = 1, p = 5, s = 7, T = 6, x = -1$

$$n = \frac{s((r-1)s+r)x^2 + ((r-1)s^2 - (r-2)s - r)x + s((r-1)s+r)p - (r-1)s}{r} + [s^2x^2 + s(s-2)x + ps^2 - s + 1] * T$$

$$n = 7x^2 + 6x + 35 + [49x^2 + 35x + 239] * 6$$

$$n = 36 + 253 * 6$$

$$n = 1554$$

El polinomio a evaluar es:

$$p(n) = r^2n^2 + r * (r - 2)n + pr^2 - r + 1 = n^2 - n + 5$$

$$p(1554) = 1554^2 - 1554 + 5 = 2413367 = 253 * 9539$$

Para probar la primalidad de estos dos factores utilizamos el Algoritmo de Cordero con $n = 1554$ y $r = 1, p = 5$

Obtenemos los pares ordenados:

T_ϕ	ϕ
300	386
269	541

$$\frac{r - 1 + T_\phi + \phi}{2(T_\phi + 2r - 1)} = \frac{1 - 1 + 300 + 386}{2(300 + 1)} = \frac{49}{43}$$

Luego uno de los factores es:

$$49^2 - 49 * 43 + 5 * 43^2 = 9539$$

$$\frac{r - 1 + T_\phi - \phi}{2(T_\phi + 2r - 1)} = \frac{1 - 1 + 300 - 386}{2(300 + 1)} = \frac{-1}{7}$$

Luego otro factor es:

$$1^2 + 1 * 7 + 5 * 7^2 = 253$$

El algoritmo obtiene los mismos factores que el teorema. Utilizaremos el otro par ordenados para encontrar más factores.

$$\frac{r - 1 + T_\phi + \phi}{2(T_\phi + 2r - 1)} = \frac{1 - 1 + 269 + 541}{2(269 + 1)} = \frac{3}{2}$$

Luego uno de los factores es:

$$3^2 - 3 * 2 + 5 * 2^2 = 23$$

Esto significa que alguno de los dos factores obtenidos por medio del Teorema es divisible por 23.

$$253 = 23 * 11$$

$$\frac{r - 1 + T_\phi - \phi}{2(T_\phi + 2r - 1)} = \frac{1 - 1 + 269 - 541}{2(269 + 1)} = \frac{-68}{135}$$

Luego uno de los factores es:

$$68^2 + 68 * 135 + 5 * 135^2 = 104929 = 11 * 9539$$

La factorización completa es:

$$2413367 = 253 * 9539 = 11 * 23 * 9539$$

3. CONCLUSIÓN.

EL TEOREMA GENERAL DE LA FACTORIZACIÓN DE CORDERO Y EL ALGORITMO DE CORDERO resuelven el problema de factorización completa de números polinomiales de la forma $r^2n^2 + r * (r - 2)n + pr^2 - r + 1$. Por lo menos para números computacionalmente manejables. A pesar de que se trabaja con números grandes sus cálculos son aceptables utilizando tecnología o no. Es un procedimiento que se puede enseñar en las universidades en un curso de Teoría de Números, no necesita de cálculos difíciles como si ocurre con otros métodos o procedimientos para factorizar números, que hasta computacionalmente son muy difíciles de programar.

4. BIBLIOGRAFÍA

- [1] Miramontes de León, D., Los infinitos de algunas series divergentes. Revista Digital Matemática, Educación e internet, 20(2), 2020.
- [2] Littlewood, J. E., Distribution des nombres premiers, C.R. Acad. Sci. Paris 158 (1914) 1869-1872.
- [3] Granville, A., and Martin, G., (2006), Prime Number Races. The American Mathematical Monthly, 113(1), 1-33. Doi: 10.2307/27641834