LOS TEOREMAS DE LA FACTORIZACIÓN DE CORDERO EN EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS ENTEROS.

Universidad Internacional San Isidro Labrador (UISIL)

Ronald Cordero Méndez

Ronald.come@gmail.com

Resumen: Se presentan Los Teoremas de la Factorización de Cordero en el conjunto Z. Ejemplos de aplicación de estos teoremas. Utilidad en el cálculo de números primos muy grandes, así como en la factorización de números enteros muy grandes. Contribución a la Teoría de Números en un problema del que no se tiene una solución eficiente como es la factorización de números enteros y material de apoyo para la construcción de software que permitan el cálculo de números primos muy grandes necesarios en la criptografía.

Abstract: The Cordero Factorization Theorems in the set Z are presented. Examples of application of these theorems. Useful in the calculation of very large prime numbers, as well as in the factorization of very large integers. Contribution to the Theory of Numbers in a problem for which there is no efficient solution, such as the factorization of integers and support material for the construction of software that allows the calculation of very large prime numbers necessary in cryptography.

Palabras clave: Factorización, números primos, números afortunados de Euler, Teoremas.

Keywords: Factorization, prime numbers, Euler's lucky numbers, Theorems.

1. La factorización de números enteros.

La factorización de un número natural o entero necesita de más estudio, actualmente no se tiene un procedimiento 100% eficaz y eficiente, y esto no es producto de falta de investigación, puesto que en la historia de la matemática podemos considerar que valiosos genios de la humanidad trabajaron para encontrar una solución, como es el caso del francés Pierre de Fermat (1601-1665) y el Suizo Leonhard Euler (1707-1783).
El creciente desarrollo de la tecnología y la construcción de diferentes algoritmos matemáticos no han podido darle fin a la rapidez y eficiencia que debe tener un software que factorice números enteros, esto deja en evidencia el reto de los matemáticos actuales y futuros en el estudio de este tema.

2. Números Compuestos y primos generados por polinomios.

¿Puede un polinomio no constante, de coeficientes enteros, tomar solamente valores primos?; la respuesta es no, ¿por qué?, debido al siguiente teorema.

Teorema.

Si $f(x) \in Z[x]$ *tiene grado positivo, entonces existe una cantidad infinita de números naturales* n *para los cuales* $f(n)$ *es un número compuesto.*

La otra pregunta que podemos hacernos es la siguiente:
¿Todo polinomio no constante $f(x) \in Z[x]$ (conjunto de todos los polinomios de coeficientes enteros) puede generar infinita cantidad de números primos? Intrigante pregunta. Bouniakowsky y luego Schinzel y Sierpinski (1958) conjeturaron que si $f(x) \in Z[x]$ irreducible, primitivo, es decir, el máximo común divisor de sus coeficientes enteros es igual a 1 y si más aún no hay ningún primo p que divida a todos los valores de $f(n)$ para enteros arbitrarios n, entonces este tipo de polinomios siempre generan números primos. (Revista Colombiana de Matemáticas. Vol XXI (1987). pág 263).

2.1 Extensiones cuadráticas.

Sea a un número entero que no posee factores cuadráticos, definimos $K = \mathbb{Q}(\sqrt{a})$ como un cuerpo cuyos elementos son de la forma $\beta = c + d\sqrt{a}\ \ donde\ c, d \in \mathbb{Q}$. Luego $K/\mathbb{Q}$ es una extensión cuadrática o sea es un espacio vectorial de dimensión dos sobre $\mathbb{Q}$. El recíproco también se cumple, es decir, si K es un cuerpo que es extensión cuadrática de $\mathbb{Q}$, entonces necesariamente es de la forma $K = \mathbb{Q}(\sqrt{a})$, donde a es un número entero sin factores cuadráticos.
Si $a > 0$, entonces K es un subcuerpo del cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales y se llama cuerpo cuadrático real.
Si $a < 0$, entonces K no es un subcuerpo del cuerpo $\mathbb{R}$ y se llama cuerpo cuadrático imaginario.

3. El Teorema Principal.

TEOREMA.
Sea p un número primo y hagamos $f_p = n^2 + n + p$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

i. $p = 2,3,4,11,17,41$
ii. $f_p(n)$ es un número primo para $n = 0,1,2,3, \dots, p-2$
iii. $\mathbb{Q}(\sqrt{1-4p})$ tiene número de clase igual a 1.

Tenemos que i. → ii., basta con sustituir p por $2,3,4,11,17,41$ y verificar que en efecto se generan números primos desde $n = 0\ hasta\ n = p - 2$.

La equivalencia de las condiciones ii.→iii. fue demostrada por primera vez por Rabinovitch en 1912 y en 1936 es demostrada por Lehmer. Mientras que iii.→ii. es demostrada por Szekeres en 1974 y por Ayoub y Chowla en 1981. (Revista Colombiana de Matemáticas. Vol XXI (1987). pág 281).

4. **Importancia de factorizar números enteros grandes**

   Los algoritmos criptográficos se basan en un un problema computacionalmente difícil de resolver, la mayoría de los algoritmos empleados en criptografía de llave pública, tienen como problema a resolver la factorización prima de números grandes. El más usado en la actualidad es el algoritmo RSA, descubierto por Ron Rivest, Adi Shamir y Len Adleman, de ahí sus iniciales RSA. El RSA es el algoritmo de llave pública mas usado en el planeta, tanto para cifrado y descifrado como para fines digitales.
   El algoritmo RSA es seguro mientras la llave privada solo la conozca el dueño. La llave pública y privada se encuentran matemáticamente relacionadas de tal manera que a partir de la llave pública sea imposible generar la llave privada.
   La fortaleza del algoritmo radica en la dificultad para factorizar números grandes, y lo cual hasta el momento no tiene una solución satisfactoria y definitiva.

5. **Los teoremas de la factorización de Cordero en el conjunto de los números enteros.**

   Los teoremas aquí publicados, y sus aplicaciones, aunque no resuelven el difícil problema de factorizar completamente un número entero muy grande, son muy útiles para factorizar en dos factores un número entero, sin necesidad de recurrir a software, test de primalidad, o divisiones sucesivas. La factorización de estos números de forma polinomial cuadrática se puede encontrar utilizando fórmulas matemáticas descubiertas por el autor de este artículo.

5.1 Primer Teorema de la factorización de Cordero en $\mathbb{Z}$

Teorema que permite factorizar en dos factores números de la forma n^2+n+p donde $n \epsilon \mathbb{Z}$

Sea $r, s, x, k \in \mathbb{Z}\ y\ \ p \,\epsilon\, \{2,3,5,11,17,41\}$.

1) Si $n = ((rs - r + 1)^2 \bullet x^2 - (rs - r + 1)(rs - r + 2s - 1) \bullet x + p \bullet (rs - r + 1)^2 + (rs + s + 1)(s - 2) + r + 2))(k - 1) + r(rs - r + 1) \bullet x^2 - (r(r + 2)(s - 2) + r^2 + 3r + 1)x + pr(rs - r + 1) + (r + 1)(s - 1)$

$entonces$: n^2+n+p es compuesto y dos de sus factores tienen la forma:

$$f_1 = (rs - r + 1)^2 \bullet x^2 - (rs - r + 1)(rs - r + 2s - 1) \bullet x + p \bullet (rs - r + 1)^2 + (rs + s + 1)(s - 2) + r + 2)$$

$$f_2 = \frac{n^2+n+p}{f_1} = f_1 * (k-1)^2 + (2\beta + 1)(k-1) + r^2x^2 - r(r+2)x + pr^2 + r + 1$$

2) Si $n = ((rs - r + 1)^2 \bullet x^2 - (rs - r + 1)(rs - r + 2s - 1) \bullet x + p \bullet (rs - r + 1)^2 + (rs + s + 1)(s - 2) + r + 2))(k + 1) - (r(rs - r + 1) \bullet x^2 - (r(r + 2)(s - 2) + r^2 + 3r + 1)x + pr(rs - r + 1) + (r + 1)(s - 1) + 1)$

$entonces$: n^2+n+p es compuesto y dos de sus factores tienen la forma:

$$f_1 = (rs - r + 1)^2 \bullet x^2 - (rs - r + 1)(rs - r + 2s - 1) \bullet x + p \bullet (rs - r + 1)^2 + (rs + s + 1)(s - 2) + r + 2)$$

$$f_2 = \frac{n^2+n+p}{f_1} = f_1 * (k+1)^2 - (2\beta + 1)(k+1) + r^2x^2 - r(r+2)x + pr^2 + r + 1$$

Con $\beta = r(rs - r + 1) \bullet x^2 - (r(r + 2)(s - 2) + r^2 + 3r + 1)x + pr(rs - r + 1) + (r + 1)(s - 1)$

Nota: $r\ y\ s\ no\ pueden\ ser\ cero\ simultáneamente.$

También es importante aclarar que el teorema es válido en el conjunto de los números reales y en el conjunto de los números complejos, es decir que las variables pueden ser sustituidos por números complejos y el Teorema se cumple.

5.1.1 Aplicaciones del Primer Teorema de La Factorización de Cordero en el Conjunto $\mathbb{Z}$.

Si damos valores enteros a las variables que conforman las fórmulas del Primer Teorema de La Factorización de Cordero en los enteros, podemos encontrar la factorización en dos factores de los números de la forma n^2+n+p con $p \in \{2, 3, 5, 11, 17, 41\}$. Es importante aclarar que los cinco teoremas que aquí se publican son válidos en cualquier conjunto numérico, es decir las variables pueden ser sustituidas por números naturales, enteros, racionales, irracionales, reales o complejos y los teoremas se cumplen. Pero el objetivo de esta publicación es factorizar números naturales, por lo que nos limitaremos a dar solamente valores enteros a las variables que contienen las fórmulas.

Ejemplo 1

Sea $r = 239, s = 678, x = 100$, $k = 451$ $y\, p = 41$ tenemos que:

$$\boldsymbol{rs - r + 1} = 239 * 678 - 239 + 1 = 161804$$

$$\boldsymbol{rs - r + 2s - 1} = 239 * 678 - 239 + 2 * 678 - 1 = 163158$$

$$\boldsymbol{rs + s + 1} = 239 * 678 + 678 + 1 = 162721$$

Luego:

$$f_1 = (\boldsymbol{rs - r + 1})^{\boldsymbol{2}} \bullet \boldsymbol{x^2} - (\boldsymbol{rs - r + 1})(\boldsymbol{rs - r + 2s - 1}) \bullet \boldsymbol{x} + \boldsymbol{p} \bullet \big((\boldsymbol{rs - r + 1})^{\boldsymbol{2}} + (\boldsymbol{rs + s} + \boldsymbol{1})(\boldsymbol{s - 2}) + \boldsymbol{r + 2}\big)$$

$$f_1 = 161804^2 * 100^2 - 161804 * 163158 * 100 + 41 * 161804^2 + 162721 * 676 + 241 = 260238894367493$$

$$\beta = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{rs - r + 1}) \bullet \boldsymbol{x^2} - \big(\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r + 2})(\boldsymbol{s - 2}) + \boldsymbol{r^2} + \boldsymbol{3r + 1}\big)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{pr}(\boldsymbol{rs - r + 1}) + (\boldsymbol{r + 1})(\boldsymbol{s - 1})$$

$$\beta = 239 * 161804 * 100^2 - (239 * 241 * 676 + 239^2 + 3 * 239 + 1) * 100 + 41 * 239 * 161804 + 240 * 677 = 384397763576$$

$$n = f_1 * (k - 1) + \beta$$

$$n = 260238894367493 * 450 + 384397763576 = 117107886863135426$$

$$f_2 = \boldsymbol{f_1} * (k - 1)^2 + (2\beta + 1)(k - 1) + \boldsymbol{r^2x^2} - \boldsymbol{r}(\boldsymbol{r + 2})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{pr^2} + \boldsymbol{r + 1}$$

$$f_2 = 260238894367493 * 450^2 + (2 * 384397763576 + 1) * 450 + 239^2 * 100^2 - 239 * 241 * 100 + 41 * 239^2 + 239 + 1 = 52698722067972343651$$

Por el Primer Teorema de la Factorización de Cordero en los enteros,

$$117107886863135426^2 + 117107886863135426 + 41 = 260238894367493 * 526987220679723436 51$$

Factorizado en sus factores primos es:

$$117107886863135426^2 + 117107886863135426 + 41 = 4943 * 150401 * 16\,419517 * 649\,305521 * 1730\,300293$$

Aunque el Teorema no logra la factorización completa, es muy útil porque logra factorizar el número en dos factores utilizando fórmulas matemáticas y sin necesidad de recurrir a test de primalidad, calculadoras factorizadoras de números, divisiones sucesivas o software.

Obsérvese que a pesar de que:

$117107886863135426^2 + 117107886863135426 + 41 =$ $137142571655489270032495224793369 43$ es un número grande (36 dígitos) su factorización prima tiene solamente 5 factores, $(4943 * 150401 * 16\,419517 * 649\,305521 * 1730\,300293)$

Ejemplo 2.

Sea $r = 139,\ s = 1608, x = -15\ ,\ k = -451\ \ y\ p = 11$ tenemos que:

$$\boldsymbol{rs - r + 1} = 139 * 1608 - 139 + 1 = 223374$$

$$\boldsymbol{rs - r + 2s - 1} = 139 * 1608 - 139 + 2 * 1608 - 1 = 226588$$

$$\boldsymbol{rs + s + 1} = 139 * 1608 + 1608 + 1 = 225121$$

Luego:

$$f_1 = (\boldsymbol{rs - r + 1})^{\boldsymbol{2}} \bullet \boldsymbol{x^2} - (\boldsymbol{rs - r + 1})(\boldsymbol{rs - r + 2s - 1}) \bullet \boldsymbol{x} + \boldsymbol{p} \bullet (\boldsymbol{rs - r + 1})^{\boldsymbol{2}} + (\boldsymbol{rs + s + 1})(\boldsymbol{s - 2}) + \boldsymbol{r + 2})$$

$$f_1 = 223374^2 * (-15)^2 - 223374 * 226588 * (-15) + 11 * 223374^2 + 225121 * 1606 + 141 = 12535012317883$$

$$\beta = \boldsymbol{r(rs - r + 1) \bullet x^2 - (r(r+2)(s-2) + r^2 + 3r + 1)x + pr(rs - r + 1) + (r+1)(s-1)}$$

$$\beta = 139 * 223374 * (-15)^2 - (139 * 141 * 1606 + 139^2 + 3 * 139 + 1) * (-15) + 11 * 139 * 223374 + 140 * 1607 = 7800221671$$

$$n = f_1 * (k+1) - (\beta + 1)$$

$$n = 12535012317883 * (-450) - 7800221672 = -5640763343269022$$

$$f_2 = \boldsymbol{f_1} * (k+1)^2 - (2\beta + 1)(k+1) + \boldsymbol{r^2 x^2 - r(r+2)x + pr^2 + r + 1}$$

$$f_2 = 12535012317883 * (-450)^2 - (2 * 7800221671 + 1) * (-450) + 139^2 * (-15)^2 - 139 * 141 * (-15) + 11 * 139^2 + 139 + 1 = 2538347014575665731$$

Por el Primer Teorema de la Factorización de Cordero en los enteros,

$$(-5640763343269022)^2 + -5640763343269022 + 11 = 12535012317883 * 2538347014575665731$$

Factorizado en sus factores primos es:

$$(-5640763343269022)^2 + -5640763343269022 + 11 = 11\text{^}2 * 797 * 129\,981359 * 245\,154001 * 10354\,091731$$

Su factorización completa tiene 6 factores que son pocos, tomando en cuenta que el número a factorizar es grande. Utilizando calculadoras factorizadoras de números enteros, como la de Dario Alpern (véase, 4. Factorization using the Elliptic Curve Method) de https://www.alpertron.com.ar/ECM.HTM. Podemos factorizar números muy grandes con factores que sobrepasan los 100 dígitos, véase www.REVISTAELLABRADOR. Primer Teorema de La Factorización de Cordero en los números enteros.

5.2 Segundo Teorema de la factorización de Cordero en Z

Este teorema es la culminación de un resultado matemático (El teorema de la multiplicación de Cordero en $\mathbb{Z}$), publicado por Ronald Cordero Méndez en: Memorias de Fimat 2020, que lo puede encontrar en: libro_memorias_fimat_concites_2020_c.pdf, página 104.

Sea $s, x, T \in \boldsymbol{Z}, s \neq 0,\ \ p \in \{2, 3,5,11,17,41\}$

1) Si $n = (s^2x^2 + s(s-2)x + ps^2 - s + 1) * T + sx^2 + (s-1)x + ps - 1$ entonces $n^2 + n + p$ es compuesto y dos de sus factores tienen la forma:

$$f_1 = s^2x^2 + s(s-2)x + ps^2 - s + 1$$

$$f_2 = \frac{n^2+n+p}{f_1} = f_1T^2 + (2\beta + 1)T + x^2 + x + p \quad \text{con } \beta = sx^2 + (s-1)x + sp - 1$$

2) Si $n = (s^2x^2 + s(s-2)x + ps^2 - s + 1) * T - (sx^2 + (s-1)x + ps\ )$ entonces $n^2 + n + p$ es compuesto y dos de sus factores tienen la forma:

$$f_1 = s^2x^2 + s(s-2)x + ps^2 - s + 1$$

$$f_2 = \frac{n^2+n+p}{f_1} = f_1T^2 - (2\beta + 1)T + x^2 + x + p \quad \text{con } \beta = sx^2 + (s-1)x + sp - 1$$

Este Teorema al igual que el primer teorema, su objetivo es encontrar una factorización en dos factores de números de la forma $n^2 + n + p\ \ con\ \ p \in \{2, 3,5,11,17,41\}$.

5.2.1 Aplicaciones del Segundo Teorema de la Factorización de Cordero en los números enteros.

Ejemplo 1.

Sea $s = 678, x = -80,\ T = 12\ \ y\ p = 41$ tenemos que:

$$f_1 = s^2x^2 + s(s-2)x + ps^2 - s + 1$$

$$f_1 = 678^2(-80)^2 + 678 * 676 * (-80) + 41 * (678)^2 - 678 + 1$$

$$f_1 = 2924157727$$

$$\beta = sx^2 + (s-1)x + sp - 1$$

$$\beta = 678 * (-80)^2 + 677 * (-80) + 678 * 41 - 1 = 4312837$$

Calculemos los dos valores para n.

$$n_1 = (s^2x^2 + s(s-2)x + ps^2 - s + 1) * T + sx^2 + (s-1)x + ps - 1$$

$$n_1 = 2924157727 * 12 + 4312837 = 35094205561$$

$$n_2 = (s^2x^2 + s(s-2)x + ps^2 - s + 1) * T - (sx^2 + (s-1)x + ps)$$

$$n_2 = 2924157727 * 12 - 4312838 = 35085579886$$

Luego:

Primer caso:

$$f_2 = f_1 T^2 + (2\beta + 1)T + \boldsymbol{x^2} + \boldsymbol{x} + \boldsymbol{p}$$

$$f_2 = 2924157727 * 12^2 + (2 * 4312837 + 1) * 12 + (-80)^2 - 80 + 41$$
$$= 421182\ 227149$$

Así:

$$(n_1)^2 + n_1 + p = f_1 * f_2$$

$$(35094205561)^2 + 35094205561 + 41 = 2924157727 * 421182227149$$

Su factorización completa es:

$$(35094205561)^2 + 35094205561 + 41 = 563 \ * \ 748\ 103423 \ * \ 2924\ 157727$$

Segundo caso:

$$f_2 = f_1 T^2 - (2\beta + 1)T + x^2 + x + p$$

$$f_2 = 2924157727 * 12^2 - (2 * 4312837 + 1) * 12 + (-80)^2 - 80 + 41$$
$$= \ 420975\ 210949$$

Así;

$$(n_2)^2 + n_2 + p = f_1 * f_2$$

$$(35085579886)^2 + 35085579886 + 41 = 2924157727 * 420975210949$$

Y esta es su factorización completa, o sea es un biprimo.

Ejemplo 2.

Sea $s = -88, x = -13,\ T = -10\ \ y\ p = 17$ tenemos que:

$$f_1 = s^2x^2 + s(s-2)x + ps^2 - s + 1$$

$$f_1 = (-88)^2(-13)^2 + (-88) * (-90) * (-13) + 17 * (-88)^2 - (-88) + 1$$

$$f_1 = 1337513$$

$$\beta = sx^2 + (s-1)x + sp - 1$$

$$\beta = (-88) * (-13)^2 + (-89) * (-13) + 17 * (-88) - 1 = -15212$$

Calculemos los dos valores para n.

$$n_1 = (s^2x^2 + s(s-2)x + ps^2 - s + 1) * T + sx^2 + (s-1)x + ps - 1$$

$$n_1 = 1337513 * (-10) - 15212 = -13390342$$

$$n_2 = (s^2x^2 + s(s-2)x + ps^2 - s + 1) * T - (sx^2 + (s-1)x + ps)$$

$$n_2 = 1337513 * (-10) - (-15212 + 1) = -13359919$$

Primer caso:

$$f_2 = f_1T^2 + (2\beta + 1)T + x^2 + x + p$$

$$f_2 = 1337513 * (-10)^2 + (2 * (-15212) + 1) * (-10) + (-13)^2 + -13 + 17 = 134055703$$

Así:

$$(n_1)^2 + n_1 + p = f_1 * f_2$$

$$(-13390342)^2 + -13390342 + 17 = 1337513 * 134055703$$

Segundo caso:

$$f_2 = f_1T^2 - (2\beta + 1)T + x^2 + x + p$$

$$f_2 = 1337513 * (-10)^2 - (2 * (-15212) + 1) * (-10) + (-13)^2 + -13 + 17 = 133447243$$

Así:

$$(n_2)^2 + n_2 + p = f_1 * f_2$$

$$(-13359919)^2 + -13359919 + 17 = 1337513 * 133447243$$

5.3 Tercer Teorema de la factorización de Cordero en $\mathbb{Z}$

Este teorema se utiliza en la factorización de los números de la forma $4n^2 + 4p - 1$ con $p \in \{2,3,5,11,17,41\}$. Al igual que el primer y segundo teoremas de la factorización de Cordero en el conjunto de los números enteros, su factorización es de dos factores, y estos pueden ser compuestos, uno primo y el otro compuesto o los dos factores pueden dar números primos.

Sea $s, x, T \in \boldsymbol{Z}, s \neq 0,\ p \in \{2,3,5,11,17,41\}$

1) Si $n = \frac{x^2-x+p-1}{2}$ entonces $4n^2 + 4p - 1$ es un número compuesto y dos de sus factores tienen la forma:

   $f_1 = x^2 - 3x + p + 2 \quad y \quad f_2 = x^2 + x + p$

2) Si $n = [s^2x^2 + s(s-2)x + ps^2 - s + 1] * T \pm \left[\frac{s(3s-2)x^2+(3s^2-8s+2)x+ps(3s-2)-3s+4}{2}\right]$ entonces $4n^2 + 4p - 1$ es un número compuesto y dos de sus factores tienen la forma:

$$f_1 = s^2x^2 + s(s-2)x + ps^2 - s + 1 \quad y$$

$$f_2 = 4f_1T^2 \pm 8T\beta + (3s-2)^2x^2 + (3s-2)(3s-8)x + \frac{(3s^2-8s+2)^2 + (3s-2)[3s^3(p-1) - s^2(2p-11) - 13s + 2]}{s^2}$$

   Donde $\beta = \left[\frac{s(3s-2)x^2+(3s^2-8s+2)x+ps(3s-2)-3s+4}{2}\right]$

5.3.1 Aplicaciones del Tercer Teorema de la Factorización de Cordero en el Conjunto de los números enteros.

Ejemplo 1

Sea $x = 90.\ p = 17,\ \ n = \frac{x^2-x+p-1}{2} = \frac{90^2-90+17-1}{2} = 4013$

$$f_1 = x^2 - 3x + p + 2 = 90^2 - 3 * 90 + 17 + 2 = 7849$$

$$f_2 = x^2 + x + p = 90^2 + 90 + 17 = 8207$$

Luego: $4n^2 + 67 = 4 * 4013^2 + 67 = 7849 * 8207$

Ejemplo 2.

Sea $s = 54, x = -24, p = 11,\ T = 13$

$$f_1 = s^2x^2 + s(s-2)x + ps^2 - s + 1 = 2916 * 576 + 54 * 52 * (-24) + 11 * 2916 - 54 + 1 = 1644247$$

$$\beta = \frac{s(3s-2)x^2 + (3s^2-8s+2)x + ps(3s-2) - 3s + 4}{2}$$
$$= \frac{54 * 160 * 576 + 8318 * (-24) + 11 * 54 * 160 - 162 + 4}{2}$$
$$= 2435945$$

$$f_2$$
$$= 4f_1T^2 \pm 8T\beta + (3s-2)^2x^2 + (3s-2)(3s-8)x$$
$$+ \frac{(3s^2-8s+2)^2 + (3s-2)[3s^3(p-1) - s^2(2p-11) - 13s + 2]}{s^2}$$
$$= 4 * 1644247 * 169 \pm 8 * 13 * 2435945 + 160^2 * 576 + 160 * 154 * (-24)$$
$$+ \frac{69189124 + 160 * (472392 * 10 - 2916 * 11 - 13 * 54 + 2)}{2916}$$

$$f_2 = 4 * 1644247 * 169 + 8 * 13 * 2435945 + 160^2 * 576 + 160 * 154 * (-24)$$
$$+ 281129$$
$$f_2 = 1379284621$$

ó

$$f_2 = 4 * 1644247 * 169 - 8 * 13 * 2435945 + 160^2 * 576 + 160 * 154 * (-24)$$
$$+ 2811 = 872608061$$

Luego:

$$n = [s^2x^2 + s(s-2)x + ps^2 - s + 1] * T$$
$$\pm \left[\frac{s(3s-2)x^2 + (3s^2-8s+2)x + ps(3s-2) - 3s + 4}{2}\right]$$

$$n = 1644247 * 13 + 2435945 = 23811156$$

ó

$$n = 1644247 * 13 - 2435945 = 18939266$$

Así:

$4n^2 + 4p - 1$

$$4 * 23811156^2 + 43 = 1644247 * 1379284621$$

ó

$$4 * 18939266^2 + 43 = 1644247 * 872608061$$

Ejemplo 3.

Sea $s = -5, x = -9, p = 41, \ T = 8$

$$f_1 = s^2x^2 + s(s-2)x + ps^2 - s + 1 = 25 * 81 + (-5) * (-7) * (-9) + 41 * 25 + 5 + 1$$
$$= 2741$$

$$\beta = \frac{s(3s-2)x^2 + (3s^2 - 8s + 2)x + ps(3s-2) - 3s + 4}{2}$$
$$= \frac{(-5) * (-17) * 81 + 117 * (-9) + 41 * (-5) * (-17) + 15 + 4}{2}$$
$$= 4668$$

$$n = [s^2x^2 + s(s-2)x + ps^2 - s + 1] * T \pm \left[\frac{s(3s-2)x^2 + (3s^2 - 8s + 2)x + ps(3s-2) - 3s + 4}{2}\right]$$

$n = 2741 * 8 + \ 4668 = 26596$

y

$n = 2741 * 8 - \ 4668 = 17260$

Para evitar utilizar la fórmula de f_2 podemos utilizar $f_2 = \frac{4n^2+4p-1}{f_1}$

$$f_2 = \frac{4 * 26596^2 + 163}{2741} = 1032247$$

Además:

$$f_2 = \frac{4 * 17260^2 + 163}{2741} = 434743$$

Luego:

Así:

$4n^2 + 4p - 1$

$$4 * 26596^2 + 163 = 2741 * 1032247$$

Además:

$$4 * 17260^2 + 163 = 2741 * 434743$$

5.4 Cuarto Teorema de la factorización de Cordero en $\mathbf{Z}$

Factorizar números enteros en sus factores primos utilizando fórmulas matemáticas no ha sido posible hasta el momento. Las fórmulas aquí publicadas permiten factorizar en dos factores algunos números enteros que tienen forma polinomial. El

Cuarto Teorema de la Factorización de Cordero al igual que los anteriores permite factorizar en dos factores que pueden ser: primos los dos factores, uno primo y el otro compuesto o los dos compuestos.

Sea $s, x, T \in \mathbb{Z}, s \neq 0 \;\; y\, p \in \{3,5,11,29\}$

1) Si $n = (4s^2x^2 - 4sx + 2ps^2 + 1) * T \pm \; (2sx^2 - x + sp)$

$entonces$: $2n^2 + p$ es compuesto y dos de sus factores tienen la forma:

$$f_1 = 4s^2x^2 - 4sx + 2ps^2 + 1$$

$$f_2 = \frac{2n^2+p}{f_1} = 2f_1T^2 \pm 4\beta T + 2x^2 + p$$

Con $\beta = 2sx^2 - x + sp$

2) Si $n = (2x^2 + p) * T \pm \; (2sx^2 + x + sp)$

$entonces$: $2n^2 + p$ es compuesto y dos de sus factores tienen la forma:

$$f_1 = 2x^2 + p$$

$$f_2 = \frac{2n^2+p}{f_1} = 2f_1T^2 \pm 4\beta T + 2f_1s^2 + 4sx + 1$$

Con $\beta = 2sx^2 + x + sp$

5.4.1 Aplicaciones del Cuarto Teorema de la Factorización de Cordero en los números enteros.

Ejemplo 1.

Sea $s = 48, x = 23, p = 29, T = 12$

$$f_1 = 4s^2x^2 - 4sx + 2ps^2 + 1$$

$$f_1 = 4 * (48)^2(23)^2 - 4 * 48 * 23 + 2 * 29 * 48^2 + 1 = 5004481$$

$$n = (4s^2x^2 - 4sx + 2ps^2 + 1) * T \pm \; (2sx^2 - x + sp)$$

$$n = 5004481 * 12 + (2 * 48 * 23^2 - 23 + 48 * 29) = 60105925$$

Ó

$$n = 5004481 * 12 - \; (2 * 48 * 23^2 - 23 + 48 * 29) = 60001619$$

$$f_2 = \frac{2n^2+p}{f_1} = 2f_1T^2 \pm 4\beta T + 2x^2 + p$$

$$f_2 = 2*5004481*144+4*52153*12+2*23^2+29 = 1443794959$$

Ó

$$f_2 = 2*5004481*144-4*52153*12+2*23^2+29 = 1438788271$$

Luego:

$$2*60105925^2+29 = 5004481*1443794959$$

Ó

$$2*60001619^2+29 = 5004481*1438788271$$

Ejemplo 2.

Sea $s = 8, x = 5, p = 29, T = 11$

$$f_1 = 2x^2 + p = 2*25+29 = 79$$

$$\beta = 2sx^2 + x + sp = 2*8*25+5+8*29 = 637$$

$$n = (2x^2+p)*T + (2sx^2+x+sp) = 79*11+637 = 1506$$

ó

$$n = (2x^2+p)*T - (2sx^2+x+sp) = 79*11-637 = 232$$

Luego:

$$f_2 = 2f_1T^2 + 4\beta T + 2f_1s^2 + 4sx + 1 =$$

$$2*79*121+4*637*11+2*79*64+4*8*5+1 = 57419$$

$$f_2 = 2f_1T^2 - 4\beta T + 2f_1s^2 + 4sx + 1 =$$

$$2*79*121-4*637*11+2*79*64+4*8*5+1 = 1363$$

Tenemos:

$$2*1506^2+29 = 79*57419$$

$$2*232^2+29 = 79*136$$

5.5 Quinto Teorema de la Factorización de Cordero en $\mathbb{Z}$

Sea $s, x, T, r \in \mathbb{Z},\ \ s, r \neq 0\ \ y\ p \in \{2, 3,5,11,17,41\}$

Si $n = (s^2x^2 + sx + p)(r * T + 1) - r(sx + 1) + 1$ entonces

$n^2 + (r - 2)n + pr^2 - r + 1$ es un número compuesto y dos de sus factores tienen la forma:

$$f_1 = s^2x^2 + sx + p$$

$$f_2 = f_1(r * T + 1)^2 - r(2sx + 1)(r * T + 1) + r^2$$

5.5.1 Aplicaciones del Quinto Teorema de la Factorización de Cordero en el Conjunto de los números enteros.

Ejemplo 1.

Sea $s = -8,\quad r = 11,\ \ x = 6,\ \ T = -4,\ \ p = 41$

$$p(n) = n^2 + 9n + 4951$$

$$n = (64 * 36 - 8 * 6 + 41) * (-43) - 11 * (-8 * 6 + 1) + 1$$

$$n = 2297 * (-43) + 11 * 47 + 1$$

Donde:

$$f_1 = 2297 \quad y \qquad n = -98253$$

$$f_2 = 2297 * (-43)^2 - 11 * 43 * 95 + 121 = 4202339$$

Entonces:

$$(-98253)^2 + 9 * (-98253) + 4951 = 9652772683 = 2297 * 4202339$$

Y ambos factores son números primos.

Ejemplo 2.

Sea $s = 15, \quad r = 8, \ x = 7, \ T = 6, \ p = 41$

$$p(n) = n^2 + (r - 2)n + pr^2 - r + 1$$

$$p(n) = n^2 + 6n + 2617$$

$$n = (s^2x^2 + sx + p)(r * T + 1) - r(sx + 1) + 1$$

$$n = (225 * 49 + 15 * 7 + 41) * (49) - 8 * (15 * 7 + 1) + 1$$

$$n = 11171 * (49) - 847$$

Donde:

$$f_1 = 11171 \quad y \qquad n = 546532$$

$$f_2 = f_1(r * T + 1)^2 - r(2sx + 1)(r * T + 1) + r^2$$

$$f_2 = 11171 * (49)^2 - 8 * 211 * 49 + 64 = 26738923$$

Entonces:

$$(546532)^2 + 6 * (546532) + 2617 = 11171 * 26738923$$

Donde 11171 es un número primo y 26738923 es compuesto.

6. **Grupo Primal de Cordero**.

Sea $1 \leq r \leq 11, \ r \in \mathbb{N} \ \ y \, p \in \{2, 3, 5, 11, 17, 41\}$.

$si \ \frac{r^2+2r-4p+5}{4r} \leq n \leq \frac{-r^2-2r+4p-1}{4r}, n \in Z$ entonces $r^2n^2 + r(r - 2)n + pr^2 - r + 1$ es un número primo.

Comprobación.

I. Para $r = 1$, $si\ \frac{8-4p}{4} \leq n \leq \frac{4p-4}{4}, n \in Z\ \ entonces$
$n^2 - n + p\ es\ un\ número\ primo.$

En efecto.

1. Para $p = 41$, $si\ -39 \leq n \leq 40$, $n \in Z\ \ entonces$
$n^2 - n + 41\ es\ un\ número\ primo.$

   Se generan los números primos:
$41, 43,47, 53, 61, 71, 83, 97, 113, 131, 151, 173, 197, 223, 251, 281, 313, 347, 383, 421, 461, 503, 547,$
$593, 641,691, 743, 797, 853, 911, 971, 1033, 1097, 1163, 1231, 1301, 1373, 1447, 1523, 1601.$

2. Para $p = 17$, $si\ -15 \leq n \leq 16$, $n \in \boldsymbol{Z}\ \ entonces$
$n^2 - n + 17\ es\ un\ número\ primo.$

   Se generan los números primos:
   $17,19, 23,29, 37, 47, 59, 73, 89, 107, 127, 149, 173, 199, 227, 257.$

3. Para $p = 11$, $si\ -9 \leq n \leq 10$, $n \in \boldsymbol{Z}\ \ entonces$
$n^2 - n + 11\ es\ un\ número\ primo.$

   Se generan los números primos:
   $11,13, 17,23, 31, 41, 53, 67, 83, 101.$

4. Para $p = 5$, $si\ -3 \leq n \leq 4$, $n \in Z\ \ entonces$
$n^2 - n + 5\ \ es\ un\ número\ primo.$

   Se generan los números primos:
   $5, 7, 11, 17.$

5. Para $p = 3$, $si\ -1 \leq n \leq 2$, $n \in Z\ \ entonces$
$n^2 - n + 5\ es\ un\ número\ primo.$

   Se generan los números primos:
   $3, 5.$

6. Para $p = 2, si\ \ 0 \leq n \leq 1$, $n \in \boldsymbol{Z}\ \ entonces$
$n^2 - n + 2\ es\ un\ número\ primo.$

   Se genera el número primo:
   $2.$

II. Para $r = 2,\ si\ \frac{13-4p}{8} \leq n \leq \frac{4p-9}{8}, n \in Z\ \ entonces$
$4n^2 + 4p - 1\ es\ un\ número\ primo.$

En efecto.

1. Para $p = 41,\ \ si\ \ -18 \leq n \leq 19,\ \ n \in \boldsymbol{Z}\ \ entonces$
   $4n^2 + 163\ es\ un\ número\ primo.$

   Se generan los números primos:
$163, 167, 199, 227, 263, 307, 359, 419, 487, 563, 647, 739, 839, 947, 1063, 1187, 1319, 1459, 1607.$

2. Para $p = 17,\ \ si\ \ -6 \leq n \leq 7,\ \ n \in \boldsymbol{Z}\ \ entonces$
   $4n^2 + 67\ es\ un\ número\ primo.$

   Se generan los números primos:
   $67, 71, 83, 103, 131, 167, 211, 263.$

3. Para $p = 11,\ \ si\ \ -3 \leq n \leq 4,\ \ n \in Z\ \ entonces$
   $4n^2 + 43\ \ es\ un\ número\ primo.$

   Se generan los números primos:
   $43, 47, 59, 79, 107.$

4. Para $p = 5,\ \ si\ 0 \leq n \leq 1,\ \ n \in Z\ \ entonces$
   $4n^2 + 19\ \ es\ un\ número\ primo.$

   Se generan los números primos:
   $19, 23.$

5. Para $p = 3\ \ \ y\ p = 2\ \ no\ hay\ casos.$

III. Para $r = 3,\ si\ \frac{20-4p}{12} \leq n \leq \frac{4p-16}{12}, n \in Z\ \ entonces$
$9n^2 + 3n + 9p - 2\ es\ un\ número\ primo.$

En efecto.

1. Para $p = 41,\ \ si\ \ -12 \leq n \leq 12,\ \ n \in Z\ \ entonces$
   $9n^2 + 3n + 367\ es\ un\ número\ primo.$

   Se generan los números primos:
$1627, 1423, 1237, 1069, 919, 787, 673, 577, 499, 439, 397, 373, 367, 379, 409,$

$457, 523, 607, 709, 829, 967, 1123, 1297, 1489, 1699.$

2. Para $p = 17,\ si\ -4 \leq n \leq 4,\ n \in Z\ \ entonces$
   $9n^2 + 3n + 151\ es\ un\ número\ primo.$

   Se generan los números primos:
   $283, 223, 181, 157, 151, 163, 193, 241, 307.$

3. Para $p = 11,\ si\ -2 \leq n \leq 2,\ n \in Z\ \ entonces$
   $9n^2 + 3n + 97\ \ es\ un\ número\ primo.$

   Se generan los números primos:
   $127, 103, 97, 109, 139.$

4. Para $p = 5,\ si\ 0 \leq n \leq 0,\ n \in Z\ \ entonces$
   $9n^2 + 3n + 43\ \ es\ un\ número\ primo.$

   Se genera el número primo 43.

5. Para $p = 3\ \ y\ p = 2\ \ no\ hay\ casos.$

IV. Para $r = 4,\ si\ \frac{29-4p}{16} \leq n \leq \frac{4p-25}{16}, n \in Z\ \ entonces$
$16n^2 + 8n + 16p - 3\ es\ un\ número\ primo.$

En efecto.

1. Para $p = 41,\ si\ -8 \leq n \leq 8,\ n \in Z\ \ entonces$
   $16n^2 + 8n + 653\ es\ un\ número\ primo.$

   Se generan los números primos:
$1613, 1381, 1181, 1013, 877, 773, 701, 661, 653, 677, 733, 821, 941, 1093, 1277, 1493, 1741.$

2. Para $p = 17,\ si\ -2 \leq n \leq 2,\ n \in Z\ \ entonces$
   $16n^2 + 8n + 269\ es\ un\ número\ primo.$

   Se generan los números primos:
   $317, 277, 269, 293, 349.$

3. Para $p = 11,\ si\ 0 \leq n \leq 1,\ n \in Z\ \ entonces$
   $16n^2 + 8n + 173\ \ es\ un\ número\ primo.$

   Se generan los números primos:
   $173, 197.$

4. Para $p = 5,\ p = 3\ \ y\, p = 2\ \ no\ hay\ casos.$

V. Para $r = 5,\ si\ \frac{40-4p}{20} \leq n \leq \frac{4p-36}{20}, n \in Z\ \ entonces$
$25n^2 + 15n + 25p - 4\ es\ un\ número\ primo.$

En efecto.

1. Para $p = 41,\ si\ -6 \leq n \leq 6,\ n \in Z\ \ entonces$
   $25n^2 + 15n + 1021\ es\ un\ número\ primo.$

   Se generan los números primos:
$1831, 1571, 1361, 1201, 1091, 1031, 1021, 1061, 1151, 1291, 1481, 1721, 2011.$

2. Para $p = 17,\ si\ -1 \leq n \leq 1,\ n \in Z\ \ entonces$
   $25n^2 + 15n + 421\ es\ un\ número\ primo.$

   Se generan los números primos:
   $431, 421, 461.$

3. Para $p = 11,\ si\ 0 \leq n \leq 0,\ n \in Z\ \ entonces$
   $25n^2 + 15n + 271\ \ es\ un\ número\ primo.$

   Se genera el número primo 271.

4. Para $p = 5,\ p = 3\ \ y\, p = 2\ \ no\ hay\ casos.$

VI. Para $r = 6,\ si\ \frac{53-4p}{24} \leq n \leq \frac{4p-49}{24}, n \in Z\ \ entonces$
$36n^2 + 24n + 36p - 5\ es\ un\ número\ primo.$

En efecto.

1. Para $p = 41,\ si - 4 \leq n \leq 4,\ n \in Z\ \ entonces$
   $36n^2 + 24n + 1471\ es\ un\ número\ primo.$

   Se generan los números primos:
   $1951, 1723, 1567, 1483, 1471, 1531, 1663, 1867, 2143.$

2. Para $p = 17,\ si\ 0 \leq n \leq 0,\ n \in Z\ \ entonces$
$36n^2 + 24n + 607\ es\ un\ número\ primo.$

Se genera el número primo 607.

3. Para $p = 11,\ p = 5,\ p = 3\ \ y\, p = 2\ \ no\ hay\ casos.$

VII. Para $r = 7,\ si\ \frac{68-4p}{28} \leq n \leq \frac{4p-64}{28}, n \in Z\ \ entonces$
$49n^2 + 35n + 49p - 6\ es\ un\ número\ primo.$

En efecto.

1. Para $p = 41,\ si - 3 \leq n \leq 3,\ n \in Z\ \ entonces$
$49n^2 + 35n + 2003\ es\ un\ número\ primo.$

Se generan los números primos:
$2339,\ \ 2129, 2017, 2003, 2087, 2269, 2549.$

2. Para $p = 17,\ si\ 0 \leq n \leq 0,\ n \in Z\ \ entonces$
$49n^2 + 35n + 827\ es\ un\ número\ primo.$

Se genera el número primo 827.

3. Para $p = 11,\ p = 5,\ p = 3\ \ y\, p = 2\ \ no\ hay\ casos.$

VIII. Para $r = 8,\ si\ \frac{85-4p}{32} \leq n \leq \frac{4p-81}{32}, n \in Z\ \ entonces$
$64n^2 + 48n + 64p - 7\ es\ un\ número\ primo.$

En efecto.

1. Para $p = 41,\ si - 2 \leq n \leq 2,\ n \in Z\ \ entonces$
$64n^2 + 48n + 2617\ es\ un\ número\ primo.$

Se generan los números primos:
$2777, 2633, 2617, 2729, 2969.$

2. Para $p = 17, p = 11,\ p = 5,\ p = 3\ \ y\, p = 2\ \ no\ hay\ casos.$

IX. Para $r = 9,\ si\ \frac{104-4p}{36} \leq n \leq \frac{4p-100}{36}, n \in Z\ \ entonces$
$81n^2 + 63n + 81p - 8\ es\ un\ número\ primo.$

En efecto.

1. Para $p = 41,\ si - 1 \leq n \leq 1,\ n \in Z\ \ entonces$
   $81n^2 + 63n + 3313\ es\ un\ número\ primo.$

   Se generan los números primos:
   $3331, 3313, 3457.$

2. Para $p = 17, p = 11,\ p = 5,\ p = 3\ \ y\ p = 2\ \ no\ hay\ casos.$

X. Para $r = 10,\ si\ \frac{125-4p}{40} \leq n \leq \frac{4p-121}{40}, n \in Z\ \ entonces$
$100n^2 + 80n + 100p - 9\ es\ un\ número\ primo.$

En efecto.

1. Para $p = 41,\ si\ 0 \leq n \leq 1,\ n \in Z\ \ entonces$
   $100n^2 + 80n + 4091\ es\ un\ número\ primo.$

   Se generan los números primos:
   $4091, 4271.$

2. Para $p = 17, p = 11,\ p = 5,\ p = 3\ \ y\ p = 2\ \ no\ hay\ casos.$

XI. Para $r = 11,\ si\ \frac{148-4p}{44} \leq n \leq \frac{4p-144}{44}, n \in Z\ \ entonces$
$121n^2 + 99n + 121p - 10\ es\ un\ número\ primo.$

En efecto.

1. Para $p = 41,\ si\ 0 \leq n \leq 0,\ n \in Z\ \ entonces$
   $121n^2 + 99n + 4951\ es\ un\ número\ primo.$

   Se genera el número primo 4951.

2. Para $p = 17, p = 11,\ p = 5,\ p = 3\ \ y\ p = 2\ \ no\ hay\ casos.$

En total se generan 180 números primos:

2, 3,5, 7,11, 13, 17,19, 23,29, 31, 37, 41, 43,47, 53, 59, 61,67, 71, 73,79, 83,89, 97,101, 103, 107,109, 113,127, 131, 139,149, 151, 157,163, 167, 173, 181,193,197,199,211, 223,227, 241,251, 263, 257, 269,271, 277,281, 283,293,307, 313,317, 347, 349,359,367, 373, 379, 383,397, 409, 419, 421, 431, 439, 457,461,487,499,503, 523,547,563,577,593, 607,641,647,653,661,673,677,691,701, 709,733, 739, 743,773,787, 797,821,827, 829, 839, 853,877, 911,919,941, 947,967,971,1013, 1021,1031,1033, 1061,1063, 1069,1091,1093,1097, 1123, 1151,1163,1181,1187,1201,1231,1237, 1277,1291,1297 1301, 1319,1361,1373, 1381,1423,1447,1459,1471,1481,1483,1489, 1493,1523,1531,1567, 1571, 1601, 1607,1613,1627,1663,1699,1721,1723,1741,1831,1867,1951,2003,2011,2017,2087,2129, 2143,2269,2339,2549,2617,2633,2729,2777,2969,3313,3331,3457,4091,4271,4951.

7. Grupo Biprimal de Cordero.

Sea $1 \leq r \leq 2p - 3,\ r \in \mathbb{N}\ \ y\, p \in \{2, 3, 5, 11, 17, 41\}$.

$si\ \ \frac{r-1}{2} \leq x \leq p - 2, x \in Z\ \ con\ \ \ n = x^2 - (r-1)x + p - r + 1$ entonces $n^2 + (r-2)n + pr^2 - r + 1$ es un número biprimo, con factores primos

$f_1 = x^2 + x + p \quad y \quad f_2 = f_1 - r(2x+1) + r^2$

Comprobación.

I. Para $r = 1,\ \ p = 41$

$$si\ 0 \leq x \leq 39\ , \qquad x \in Z\ \ con\, n = x^2 + 41\, entonces \quad n^2 - n + 41$$

es biprimo, con factores $f_1 = x^2 + x + 41 \quad y \quad f_2 = f_1 - (2x+1) + 1$

se generan los biprimos:

$x = 0, \qquad n = 41,\ n^2 - n + 41 = 1681, \qquad f_1 = 41, \qquad f_2 = 41 - 1 + 1 = 41$

$x = 1, \qquad n = 42,\ n^2 - n + 41 = 1763, \qquad f_1 = 43, \qquad f_2 = 43 - 3 + 1 = 41$

$x = 2, \qquad n = 45,\ n^2 - n + 41 = 2021, \qquad f_1 = 47, \qquad f_2 = 47 - 5 + 1 = 43$

$x = 3, \qquad n = 50,\ n^2 - n + 41 = 2491, \qquad f_1 = 53, \qquad f_2 = 53 - 7 + 1 = 47$

$x = 4, \qquad n = 57,\ n^2 - n + 41 = 3233, \qquad f_1 = 61, \qquad f_2 = 61 - 9 + 1 = 53$

$x = 5, \qquad n = 66,\ n^2 - n + 41 = 4331, \qquad f_1 = 71, \qquad f_2 = 71 - 11 + 1 = 61$

$x = 6, \qquad n = 77,\ n^2 - n + 41 = 5893, \qquad f_1 = 83, \qquad f_2 = 83 - 13 + 1 = 71$

$x = 7, \quad n = 90,\ n^2 - n + 41 = 8051, \quad f_1 = 97, \quad f_2 = 97 - 15 + 1 = 83$

$x = 8, \quad n = 105,\ n^2 - n + 41 = 10961,\ f_1 = 113, \quad f_2 = 113 - 17 + 1 = 97$

$x = 9, \quad n = 122,\ n^2 - n + 41 = 14803, f_1 = 131, \quad f_2 = 131 - 19 + 1 = 113$

$x = 10, \quad n = 141,\ n^2 - n + 41 = 19781, \quad f_1 = 151, \quad f_2 = 151 - 21 + 1 = 131$

$x = 11, \quad n = 162,\ n^2 - n + 41 = 26123, \quad f_1 = 173, \quad f_2 = 173 - 23 + 1 = 151$

$x = 12, \quad n = 185,\ n^2 - n + 41 = 34081, \quad f_1 = 197, \quad f_2 = 197 - 25 + 1 = 173$

$x = 13, \quad n = 210,\ n^2 - n + 41 = 43931, \quad f_1 = 223, \quad f_2 = 223 - 27 + 1 = 197$

$x = 14, \quad n = 237,\ n^2 - n + 41 = 55973, \quad f_1 = 251, \quad f_2 = 251 - 29 + 1 = 223$

$x = 15, \quad n = 266,\ n^2 - n + 41 = 70531, \quad f_1 = 281, \quad f_2 = 281 - 31 + 1 = 251$

$x = 16, \quad n = 297,\ n^2 - n + 41 = 87953, \quad f_1 = 313, \quad f_2 = 313 - 33 + 1 = 281$

$x = 17, \quad n = 330,\ n^2 - n + 41 = 108611, \quad f_1 = 347, \quad f_2 = 347 - 35 + 1 = 313$

$x = 18, \quad n = 365,\ n^2 - n + 41 = 132901, \quad f_1 = 383, \quad f_2 = 383 - 37 + 1 = 347$

$x = 19, \quad n = 402,\ n^2 - n + 41 = 161243, \quad f_1 = 421, \quad f_2 = 421 - 39 + 1 = 383$

$x = 20, \quad n = 441,\ n^2 - n + 41 = 194081, \quad f_1 = 461, \quad f_2 = 461 - 41 + 1 = 421$

$x = 21, \quad n = 482,\ n^2 - n + 41 = 231883, \quad f_1 = 503, \quad f_2 = 503 - 43 + 1 = 43$

$x = 22, \quad n = 525,\ n^2 - n + 41 = 275141, \quad f_1 = 547, \quad f_2 = 547 - 45 + 1 = 43$

$x = 23, \quad n = 570,\ n^2 - n + 41 = 324371, \quad f_1 = 593, \quad f_2 = 593 - 47 + 1 = 43$

$x = 24, \quad n = 617,\ n^2 - n + 41 = 380113, \quad f_1 = 641, \quad f_2 = 641 - 49 + 1 = 43$

$x = 25, \quad n = 666,\ n^2 - n + 41 = 442931, \quad f_1 = 691, \quad f_2 = 691 - 51 + 1 = 43$

$x = 26, \quad n = 717,\ n^2 - n + 41 = 513413, \quad f_1 = 743, \quad f_2 = 743 - 53 + 1 = 43$

$x = 27, \quad n = 770,\ n^2 - n + 41 = 592171, \quad f_1 = 797, \quad f_2 = 797 - 55 + 1 = 43$

$x = 28, \quad n = 825,\ n^2 - n + 41 = 679841, \quad f_1 = 853, \quad f_2 = 853 - 57 + 1 = 43$

$x = 29, \quad n = 882,\ n^2 - n + 41 = 777083, \quad f_1 = 911, \quad f_2 = 911 - 59 + 1 = 43$

$x = 30, \quad n = 941,\ n^2 - n + 41 = 884581, \quad f_1 = 971, \quad f_2 = 971 - 61 + 1 = 43$

$x = 31, \quad n = 1002,\ n^2 - n + 41 = 1003043, \quad f_1 = 1033, \quad f_2 = 1033 - 63 + 1 = 971$

$x = 32, \quad n = 1065,\ n^2 - n + 41 = 1133201, \quad f_1 = 1097, \quad f_2 = 1097 - 65 + 1 = 1033$

$x = 33, \quad n = 1130,\ n^2 - n + 41 = 1275811, \quad f_1 = 1163, \quad f_2 = 1163 - 67 + 1 = 1097$

$x = 34, \quad n = 1197,\ n^2 - n + 41 = 1431653, \quad f_1 = 1231, \quad f_2 = 1231 - 69 + 1 = 1163$

$x = 35, \quad n = 1266,\ n^2 - n + 41 = 1601531, \quad f_1 = 1301, \quad f_2 = 1301 - 71 + 1 = 1231$

$x = 36, \quad n = 1337, \; n^2 - n + 41 = 1786273, \quad f_1 = 1373, \quad f_2 = 1373 - 73 + 1 = 1301$

$x = 37, \quad n = 1410, \; n^2 - n + 41 = 1986731, \quad f_1 = 1447, \quad f_2 = 1447 - 75 + 1 = 1373$

$x = 38, \quad n = 1485, \; n^2 - n + 41 = 2203781, \quad f_1 = 1523, \quad f_2 = 1523 - 77 + 1 = 1447$

$x = 39, \quad n = 1562, \; n^2 - n + 41 = 2438323, f_1 = 1601, \quad f_2 = 1601 - 79 + 1 = 1523$

Para los otros casos se repiten los biprimos.

II. Para $r = 2, \; p = 41$

$$si\ 1 \le x \le 39\,, \qquad x \in Z \;\; con\, n = x^2 - x + 40\ entonces \quad n^2 + 163$$

es biprimo, con factores $f_1 = x^2 + x + 41 \quad y \quad f_2 = f_1 - 2(2x+1) + 4$

se generan los biprimos:

$x = 1, \quad n = 40, \quad n^2 + 163 = 1763, \quad f_1 = 43, \quad f_2 = 43 - 6 + 4 = 41$

$x = 2, \quad n = 42, \quad n^2 + 163 = 1927, \quad f_1 = 47, \quad f_2 = 47 - 10 + 4 = 41$

$x = 3, \quad n = 46, \quad n^2 + 163 = 2279, \quad f_1 = 53, \quad f_2 = 53 - 14 + 4 = 43$

$x = 4, \quad n = 52, \quad n^2 + 163 = 2867, \quad f_1 = 61, \quad f_2 = 61 - 18 + 4 = 47$

$x = 5, \quad n = 60, \quad n^2 + 163 = 3763, \quad f_1 = 71, \quad f_2 = 71 - 22 + 4 = 53$

$x = 6, \quad n = 70, \quad n^2 + 163 = 5063 \quad f_1 = 83, \quad f_2 = 83 - 26 + 4 = 61$

$x = 7, \quad n = 82, \quad n^2 + 163 = 6887, \quad f_1 = 97, \quad f_2 = 97 - 30 + 4 = 71$

$x = 8, \quad n = 96, \quad n^2 + 163 = 9379, \quad f_1 = 113, \quad f_2 = 113 - 34 + 4 = 83$

$x = 9, \quad n = 112, \quad n^2 + 163 = 12707, \quad f_1 = 131, \quad f_2 = 131 - 38 + 4 = 97$

$x = 10, \quad n = 130, \quad n^2 + 163 = 17063, \quad f_1 = 151, \quad f_2 = 151 - 42 + 4 = 113$

$x = 11, \quad n = 150, \quad n^2 + 163 = 22663, \quad f_1 = 173, \quad f_2 = 173 - 46 + 4 = 131$

$x = 12, \quad n = 172, \quad n^2 + 163 = 29747, \quad f_1 = 197, \quad f_2 = 197 - 50 + 4 = 151$

$x = 13, \quad n = 196, \quad n^2 + 163 = 38579, \quad f_1 = 223, \quad f_2 = 223 - 54 + 4 = 173$

$x = 14, \quad n = 222, \quad n^2 + 163 = 49447, \quad f_1 = 251, \quad f_2 = 251 - 58 + 4 = 197$

$x = 15, \quad n = 250, \quad n^2 + 163 = 62663, \quad f_1 = 281, \quad f_2 = 281 - 62 + 4 = 223$

$x = 16, \quad n = 280, \quad n^2 + 163 = 78563, \quad f_1 = 313, \quad f_2 = 313 - 66 + 4 = 251$

$x = 17, \quad n = 312, \quad n^2 + 163 = 97507, \quad f_1 = 347, \quad f_2 = 347 - 70 + 4 = 281$

$x = 18,\quad n = 346,\ n^2 - n + 41 = 132901,\quad f_1 = 383,\quad f_2 = 383 - 37 + 1 = 347$

$x = 19,\quad n = 382,\ n^2 - n + 41 = 161243,\quad f_1 = 421,\quad f_2 = 421 - 39 + 1 = 383$

$x = 20,\quad n = 420,\ n^2 - n + 41 = 194081,\quad f_1 = 461,\quad f_2 = 461 - 41 + 1 = 421$

$x = 21,\quad n = 482,\ n^2 - n + 41 = 231883,\quad f_1 = 503,\quad f_2 = 503 - 43 + 1 = 43$

$x = 22,\quad n = 525,\ n^2 - n + 41 = 275141,\quad f_1 = 547,\quad f_2 = 547 - 45 + 1 = 43$

$x = 23,\quad n = 570,\ n^2 - n + 41 = 324371,\quad f_1 = 593,\quad f_2 = 593 - 47 + 1 = 43$

$x = 24,\quad n = 617,\ n^2 - n + 41 = 380113,\quad f_1 = 641,\quad f_2 = 641 - 49 + 1 = 43$

$x = 25,\quad n = 666,\ n^2 - n + 41 = 442931,\quad f_1 = 691,\quad f_2 = 691 - 51 + 1 = 43$

$x = 26,\quad n = 717,\ n^2 - n + 41 = 513413,\quad f_1 = 743,\quad f_2 = 743 - 53 + 1 = 43$

$x = 27,\quad n = 770,\ n^2 - n + 41 = 592171,\quad f_1 = 797,\quad f_2 = 797 - 55 + 1 = 43$

$x = 28,\quad n = 825,\ n^2 - n + 41 = 679841,\quad f_1 = 853,\quad f_2 = 853 - 57 + 1 = 43$

$x = 29,\quad n = 882,\ n^2 - n + 41 = 777083,\quad f_1 = 911,\quad f_2 = 911 - 59 + 1 = 43$

$x = 30,\quad n = 941,\ n^2 - n + 41 = 884581,\quad f_1 = 971,\quad f_2 = 971 - 61 + 1 = 43$

$x = 31,\quad n = 1002,\ n^2 - n + 41 = 1003043,\quad f_1 = 1033,\quad f_2 = 1033 - 63 + 1 = 971$

$x = 32,\quad n = 1065,\ n^2 - n + 41 = 1133201,\quad f_1 = 1097,\quad f_2 = 1097 - 65 + 1 = 1033$

$x = 33,\quad n = 1130,\ n^2 - n + 41 = 1275811,\quad f_1 = 1163,\quad f_2 = 1163 - 67 + 1 = 1097$

$x = 34,\quad n = 1197,\ n^2 - n + 41 = 1431653,\quad f_1 = 1231,\quad f_2 = 1231 - 69 + 1 = 1163$

$x = 35,\quad n = 1266,\ n^2 - n + 41 = 1601531,\quad f_1 = 1301,\quad f_2 = 1301 - 71 + 1 = 1231$

$x = 36,\quad n = 1337,\ n^2 - n + 41 = 1786273,\quad f_1 = 1373,\quad f_2 = 1373 - 73 + 1 = 1301$

$x = 37,\quad n = 1410,\ n^2 - n + 41 = 1986731,\quad f_1 = 1447,\quad f_2 = 1447 - 75 + 1 = 1373$

$x = 38,\quad n = 1485,\ n^2 - n + 41 = 2203781,\quad f_1 = 1523,\quad f_2 = 1523 - 77 + 1 = 1447$

$x = 39,\quad n = 1562,\ n^2 - n + 41 = 2438323, f_1 = 1601,\quad f_2 = 1601 - 79 + 1 = 1523$

Para los otros casos se repiten los biprimos. Para los casos que faltan quedan como ejercicios para el lector.

8. CRIBA. Basada en el Segundo Teorema de la Factorización de Cordero en los números enteros.

Al eliminar los valores de n que generan números compuestos en $n^2 + n + p$ donde p es un número afortunado de Euler, obtenemos los valores de n que al sustituir en $n^2 + n + p$ siempre genera un número primo.

Definimos las funciones polinomiales cuadráticas:

I. $n = f(x) = sx^2 + (s-1)x + ps - 1$

$Dominio\ \ máximo\ de\ f(x){:} -a \leq x \leq a, \qquad x \in \mathbb{N}, \qquad a \in \mathbb{N}$

$$1 \leq s < \frac{2a^2 + 2p - 1 + \sqrt{(2a^2 + 2p - 1)^2 + 4p - 1}}{4p - 1}, \ \ s \in \mathbb{N}$$

II. $n = g(x) = ((s+1)^2x^2 + (s^2-1)x + p(s+1)^2 - s)k + (s+1)x^2 + sx + p(s+1) - 1$

$$1 \leq s < \frac{k - p - 2pk + \sqrt{(k - p - 2pk)^2 + 4pk(a^2 - pk)}}{2pk}, s \in \mathbb{N}$$

III. $n = h(x) = ((s+2)^2x^2 + s(s+2)x + p(s+2)^2 - s - 1)(k+2) - ((s+2)x^2 + (s+1)x + p(s+2))$

$$1 \leq s < \frac{k - 7p + 2 - 4pk + \sqrt{(k - 7p + 2 - 4pk)^2 + 4(pk+2)(a^2 + 1 + k - 4pk - 5p)}}{2pk},$$

$s \in \mathbb{N}$

IV. Se debe obtener todos los valores de n menores o iguales a $a^2 + p - 1$.

$$f(x) = n \leq a^2 + p - 1$$

$$g(x) = n \leq \ a^2 + p - 1$$

$$h(x) = n \leq \ a^2 + p - 1$$

V. $Eliminar\ todos\ los\ valores\ de\ n\ \ obtenidos\ en\ IV\ del\ conjunto$ $\mathbb{N} \cup \{0\}$

VI. $Los\ valores\ de\ \ n\ que\ quedan\ evaluar\ en\ \ n^2 + n + p$

Los resultados siempre son números primos.

Veamos un ejemplo de aplicación de la Criba.

Ejemplo.

Para $a = 20, p = 41$

$$DOMINIO\ MÁXIMO\ DE\ f(x): -20 \leq x \leq 20, \qquad x \in \mathbb{N}$$

$$1 \leq s < \frac{2 * 20^2 + 2 * 41 - 1 + \sqrt{(2 * 20^2 + 2 * 41 - 1)^2 + 4 * 41 - 1}}{4 * 41 - 1}, \ \ s \in \mathbb{N}$$

$$1 \leq s < 10{,}81, \ \ s \in \mathbb{N}$$

$$s = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$$

$$n \leq 20^2 + 41 - 1 = 440$$

Caso 1.

Empecemos con:

$$n = f(x) = sx^2 + (s-1)x + ps - 1 \leq 440$$

Para $s = 1, \ \ n = \ x^2 + 40 \leq 440$

Basta tomar de 0 $hasta$ 20.

$n = 40{,}41{,}44{,}49, 56, 65, 76, 89, 104, 121, 140, 161, 184, 209, 236, 265, 296, 329, 364, 401, 440.$

Para $s = 2, \ \ n = \ 2x^2 + x + 81 \leq 440$

Basta tomar de -13 $hasta$ 13.

$$n = 406{,}357{,}312{,}271{,}234{,}201, 172, 147, 126, 109, 96, 87, 82, 81, 84, 91, 102, 117, 136, 159, 186, 217, 252$$

$$291, 334, 381, 432.$$

Para $s = 3, \ \ n = \ 3x^2 + 2x + 122 \leq 440$

Basta tomar de -10 $hasta$ 9.

n
$= 402,347,298,255,218,187,162,143,130,123,122,127,138,155,178,207,242,283,330,383.$

Para $s = 4$, $n = 4x^2 + 3x + 163 \leq 440$

Basta tomar de -8 $hasta$ 7.

$$n = 395,338,289,248,215,190,173,164,163,170,185,208,239,278,325,380.$$

Para $s = 5$, $n = 5x^2 + 4x + 204 \leq 440$

Basta tomar de -7 $hasta$ 6.

$$n = 421,360,309,268,237,216,205,204,213,232,261,300,349,408.$$

Para $s = 6$, $n = 6x^2 + 5x + 245 \leq 440$

Basta tomar de -6 $hasta$ 5.

$$n = 431,370,321,284,259,246,245,256,279,314,361,420.$$

Para $s = 7$, $n = 7x^2 + 6x + 286 \leq 440$

Basta tomar de -5 $hasta$ 4.

$$n = 431,374,331,302,287,286,299,326,367,422.$$

Para $s = 8$, $n = 8x^2 + 7x + 327 \leq 440$

Basta tomar de -4 $hasta$ 3.

$$n = 427,378,345,328,327,342,373,420.$$

Para $s = 9$, $n = 9x^2 + 8x + 368 \leq 440$

Basta tomar de -3 $hasta$ 2.

$$n = 425, 388, 369, 368, 385, 420.$$

Para $s = 10$, $n = 10x^2 + 9x + 409 \leq 440$

Basta tomar de -2 $hasta$ 1.

$$n = 431, 410, 409, 428.$$

Caso 2.

$$n = ((s+1)^2x^2 + (s^2-1)x + p(s+1)^2 - s)k + (s+1)x^2 + sx + p(s+1) - 1 \leq 440$$

Para $k = 1$

$$1 \leq s < \frac{k - p - 2pk + \sqrt{(k-p-2pk)^2 + 4pk(a^2 - pk)}}{2pk}, \qquad s \in \mathbb{N}$$

$$1 \leq s < \frac{-122 + \sqrt{14884 + 58876}}{82}, \qquad s \in \mathbb{N}$$

$$1 \leq s < 1{,}8 \qquad s \in \mathbb{N}$$

Solamente para $s = 1$

$$n = (4x^2 + 163) + 2x^2 + x + 81 \leq 440$$

$$n = 6x^2 + x + 244 \leq 440$$

Basta tomar de $-5 \ hasta \ 5$.

$$n = 389, 336, 295, 266, 249, 244, 251, 270, 301, 344,399.$$

Para $k = 2$

$$1 \leq s < \frac{k - p - 2pk + \sqrt{(k - p - 2pk)^2 + 4pk(a^2 - pk)}}{2pk}, \qquad s \in \mathbb{N}$$

$$1 \leq s < \frac{-203 + \sqrt{41209 + 104304}}{164}, \qquad s \in \mathbb{N}$$

$$1 \leq s < 1{,}08 \qquad s \in \mathbb{N}$$

Solamente $s = 1$

$$n = (4x^2 + 163) * 2 + 2x^2 + x + 81 \leq 440$$

$$n = 10x^2 + x + 407 \leq 440$$

Basta tomar: $-1 \ hasta \ 1$

$$n = 416, 407, 418$$

Para $k = 3$

$$1 \leq s < \frac{k - p - 2pk + \sqrt{(k - p - 2pk)^2 + 4pk(a^2 - pk)}}{2pk}, \qquad s \in \mathbb{N}$$

$$1 \leq s < \frac{-284 + \sqrt{80656 + 136284}}{246}, \qquad s \in \mathbb{N}$$

$$1 \leq s < 0{,}73, \qquad s \in \mathbb{N}$$

No hay posibilidades.

Caso 3.

$$n = ((s+2)^2x^2 + s(s+2)x + p(s+2)^2 - s - 1)(k+2) - \left((s+2)x^2 + (s+1)x + p(s+2)\right) \leq 440$$

Para $k = 1$

$$1 \leq s < \frac{k - 7p + 2 - 4pk + \sqrt{(k - 7p + 2 - 4pk)^2 + 4(pk+2)(a^2 + 1 + k - 4pk - 5p)}}{2pk}, \qquad s \in \mathbb{N}$$

$$1 \leq s < \frac{-448 + \sqrt{200704 + 5676}}{82}, \qquad s \in \mathbb{N}$$

$$1 \leq s < 0{,}07, \qquad s \in \mathbb{N}$$

No hay posibilidades.

Luego:

n
$= 40, 41, 44, 49, 56, 65, 76, 81, 82, 84, 87, 89, 91,96, 102, 104, 109, 117, 121,122, 123,126, 127,130,$

$136, 138, 140, 143, 147, 155, 159, 161, 162,163, 164, 170, 172, 173, 178, 184, 185, 186,187,190, 201,$

$204, 205, 207, 208, \quad 209, 213, 215, 216, 217, 218, 232, 234, \quad 236, 237, 239, 242, 244, 245, 246, 248,$

$249, \quad 251, 252, 255, 256, 259, 261, 265, 266, 268, 270, 271, 278, 279, 283, 284, 286, 287, 289, 291, 295,$

$296, 298, 299, 300, 301, 302, 309, 312, 314, 321, 325, 326, 327, 328, 329,330,331, 334, 336, 338, 342,$

$344, 345, 347,349, 357, 360, 361, 364, 367, 368, 369, 370, 373, 374, 378, 380, 381,383, 385,388,389,395,$

$399,401,402 ,406,407,408,409,410,416,418,420,421,422,425,427,428, 431, 432, 440.$

Eliminando los valores anteriores en el conjunto de los números naturales y el cero obtenemos:

n
$= 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30,$

$31,32,33,34,35,36,37,38,39,42,43,45,46,47,48,50,51,52,53,54,55,57,58,59,60,61,62,63,64,$

$66,67,68,69,70.71,72,73,74,75,77,78,79,80,83,85,86,88,90,92,93,94,95,97,98,99,100,101,$

$103,105,106,107,108,110,111,112,113,114,115,116,118,119,120,124,125,128,129,131,132,$

$133,134,135,137,139,141,142,144,145,146,148,149,150,151,152,153,154,156,157,158,160,$

165,166,167,168,169,171,174,175,177,179,180,181,182,183,188,189,191,192,193,194,195,
96,197,198,199,200,202,203,206,210,211,212,214,219,220,221,222,223,224,225,226,227,
228,229,230,231,233,235,238,240,241,243,247,250,253,254,257,258,260,262,263,264,267
269,272,273,274,275,276,277,280,281,282,285,288,290,292,293,294,297,303,304,305,306,
307,308,310,311,313,315,316,317,318,319,320,322,323,324,332,333,335,337,339,340,341,
343,346,348,350,351,352,353,354,355,356,358,359,362,363,365,366,371,372,375,376,377,
379,382,384,387,390,391,392,393,394,396,397,398,400,403,404,405,411,412,413,414,415,
417,419,423,424,426,429,430,433,434,435,436,437,438,439.

Evaluando todos estos valores en n^2+n+41, obtenemos:

41, 43,47,53,61,71,83,97,113,131,151,173,197,223,251,281,313,347,383,421,461,503,547,
593,641,691,743,797,853,911,971,1033,1097,1163,1231,1301,1373,1447,1523,1601,1847,
1933,2111,2203,2297,2393,2591,2693,2797, 2903,3011,3121,3347,3463,3581,3701,3823,
3947,4073,4201,4463,4597,4733,4871,5011,5153,5297,5443,5591,5741,6047,6203,6361,
6521,7013,7351,7523,7873,8231,8597,8783,8971,9161,9547,9743,9941,10141,10343,10753
11171,11383,11597,11813,12251,12473,12697,12923,13151,13381,13613,14083,14321,
14561,15541,15791,16553,16811,17333,17597,17863,18131,18401,18947,19501,20063,
20347,20921,21211,21503,22093,22391,22691,22993,23297,23603,23911,24533,24847,
25163,25801,27431,27763,28097,28433,28771,29453,30491,30841,31547,32261,32621,
32983,33347,33713,35573,35951,36713,37097,37483,37871,38261,38653,39047,39443,
39841,40241,41047,41453,42683,44351,44773,45197,46051,48221,48661,49103,49547,
49993,50441,50891,51343,51797,52253,52711,53171,53633,54563,55501,56923,57881,
58363,59333,61297,62791,64303,64811,66347,66863,67901,68947,69473,70001,71597,
72671,74297,74843,75391,75941,76493,77047,78721,79283,79847,81551,83273,84431,
85597,86183,86771,88547,92153,92761,93371,93983,94597,95213,96451,97073,98323,
99581,100213,100847,101483,102121,102761,104047,104693,105341,110597,111263,
112601,113947,115301,115981,116663,118033,120103,121493,122891,123593,124297,
125003,125711,126421,127133,128563,129281,131447,132173,133631,134363,138053,

138797,141041,141793,142547,144061,146347,147881,150197,152531,153313,154097,

154883,155671,157253,158047,158843,160441,162853,163661,164471,169373,170197,

171023,171851,172681,174347,176021,179393,180241,181943,184511,185371,187963,

188831,189701,190573,191447,192323,193201.

Todos estos números son números primos. Se pueden realizar Cribas utilizando $p = 41, 17, 11, 5, 3$ siendo los más eficientes los números afortunados de Euler, $p = 41\ y\ 17$.

9. Demostraciones de los Teoremas.

A continuación las demostraciones de los teoremas.

9.1 La demostración del Primer Teorema de la Factorización de Cordero en los Números Enteros la puede encontrar en WWW.REVISTAELLABRADOR.NET. Primer Teorema de la Factorización de Cordero en los números enteros. Pdf. Pág 25.

9.2 Demostración del Segundo Teorema de La Factorización de Cordero en los números enteros:

Sea $s, x, T \in Z, s \neq 0,\ \ p \in \{2, 3,5,11,17,41\}$

1) Si $n = (s^2x^2 + s(s-2)x + ps^2 - s + 1) * T + sx^2 + (s-1)x + ps - 1$ entonces $n^2 + n + p$ es compuesto y dos de sus factores tienen la forma:

$$f_1 = s^2x^2 + s(s-2)x + ps^2 - s + 1$$

$$f_2 = \frac{n^2+n+p}{f_1} = f_1T^2 + (2\beta + 1)T + x^2 + x + p \quad \text{con } \beta = sx^2 + (s-1)x + sp - 1$$

2) Si $n = (s^2x^2 + s(s-2)x + ps^2 - s + 1) * T - (sx^2 + (s-1)x + ps\,)$ entonces $n^2 + n + p$ es compuesto y dos de sus factores tienen la forma:

$$f_1 = s^2x^2 + s(s-2)x + ps^2 - s + 1$$

$$f_2 = \frac{n^2+n+p}{f_1} = f_1T^2 - (2\beta + 1)T + x^2 + x + p \quad \text{con } \beta = sx^2 + (s-1)x + sp - 1$$

Demostración.

Sea $s, x, T \in Z, s \neq 0, \quad p \in \{3{,}5{,}11{,}17{,}41\}$

$$n = (s^2x^2 + s(s-2)x + ps^2 - s + 1) * T + sx^2 + (s-1)x + ps - 1 = \alpha * T + \beta$$

Donde $\boldsymbol{\alpha} = s^2x^2 + s(s-2)x + ps^2 - s + 1 \quad y \quad \beta = sx^2 + (s-1)x + ps - 1$

1) $n = \alpha * T + \beta$

$$n^2 + n + p = (\alpha * T + \beta)^2 + \alpha * T + \beta + p$$

$$n^2 + n + p = \alpha^2T^2 + 2\alpha\beta T + \beta^2 + \alpha T + \beta + p$$

$$n^2 + n + p = \alpha\left(\alpha T^2 + 2\beta T + T + \frac{\beta^2 + \beta + p}{\alpha}\right)$$

Demostraremos que:

$$\frac{\beta^2+\beta+p}{\alpha} = x^2 + x + p$$

En efecto:

$$\frac{\beta^2+\beta+p}{\alpha} = \frac{\left(sx^2+(s-1)x+ps-1\right)^2+sx^2+(s-1)x+ps-1+p}{s^2x^2+s(s-2)x+ps^2-s+1}$$

$$\frac{\beta^2+\beta+p}{\alpha} = \frac{s^2x^4+(s-1)^2x^2+(ps-1)^2+2s(s-1)x^3+2s(ps-1)x^2+2(s-1)(ps-1)x+sx^2+(s-1)x+ps-1+p}{s^2x^2+s(s-2)x+ps^2-s+1}$$

$$\frac{\beta^2 + \beta + p}{\alpha} = \frac{s^2x^4 + (2s^2 - 2s)x^3 + (s^2 - 2s + 1 + 2ps^2 - 2s + s)x^2 + (s-1)(2ps-1)x + p^2s^2 - 2ps + 1 + ps - 1 + p}{s^2x^2 + s(s-2)x + ps^2 - s + 1}$$

$$\frac{\beta^2 + \beta + p}{\alpha} = \frac{s^2x^4 + (2s^2 - 2s)x^3 + (s^2 - 3s + 2ps^2 + 1)x^2 + (2ps^2 - s - 2ps + 1)x + p^2s^2 - ps + p}{s^2x^2 + s(s-2)x + ps^2 - s + 1}$$

Podemos comprobar que:

$$(x^2 + x + p)(s^2x^2 + s(s-2)x + ps^2 - s + 1) = s^2x^4 + s(s-2)x^3 + ps^2x^2 - sx^2 + x^2 + s^2x^3 + s(s-2)x^2 + ps^2x - sx + x + s^2px^2 + ps(s-2)x + p^2s^2 - ps + p$$

$$= s^2x^4 + (2s^2 - 2s)x^3 + (ps^2 - s + 1 + s^2 - 2s + s^2p)x^2 + (ps^2 - s + 1 + ps^2 - 2ps)x + p^2s^2 - ps + p$$

$$= s^2x^4 + (2s^2 - 2s)x^3 + (s^2 - 3s + 2ps^2 + 1)x^2 + (2ps^2 - s - 2ps + 1)x + p^2s^2 - ps + p$$

Luego:

$$\frac{\beta^2 + \beta + p}{\alpha} = \frac{s^2x^4 + (2s^2 - 2s)x^3 + (s^2 - 3s + 2ps^2 + 1)x^2 + (2ps^2 - s - 2ps + 1)x + p^2s^2 - ps + p}{s^2x^2 + s(s-2)x + ps^2 - s + 1}$$

$$\frac{\beta^2 + \beta + p}{\alpha} = \frac{(x^2 + x + p)(s^2x^2 + s(s-2)x + ps^2 - s + 1)}{s^2x^2 + s(s-2)x + ps^2 - s + 1}$$

$$\frac{\beta^2 + \beta + p}{\alpha} = x^2 + x + p$$

Así:

$$n^2 + n + p = \alpha\left(\alpha T^2 + 2\beta T + T + \frac{\beta^2 + \beta + p}{\alpha}\right)$$

$$n^2 + n + p = \alpha(\alpha T^2 + (2\beta + 1)T + x^2 + x + p)$$

Por lo tanto:

$n^2 + n + p$ es factorizable en dos factores enteros:

$$f_1 = \alpha = s^2x^2 + s(s-2)x + ps^2 - s + 1$$

Y $f_2 = f_1T^2 + (2\beta + 1)T + x^2 + x + p$ con $\beta = sx^2 + (s-1)x + sp - 1$

2) $n = \alpha * T - (\beta + 1)$

$$n^2 + n + p = \left(\alpha * T - (\beta + 1)\right)^2 + \alpha * T - \beta - 1 + p$$

$$n^2 + n + p = \alpha^2T^2 - 2\alpha T(\beta + 1) + (\beta + 1)^2 + \alpha T - \beta - 1 + p$$

$$n^2 + n + p = \alpha^2T^2 - \alpha T(2\beta + 2) + \beta^2 + 2\beta + 1 + \alpha T - \beta - 1 + p$$

$$n^2 + n + p = \alpha^2T^2 - \alpha T(2\beta + 1) + \beta^2 + \beta + p$$

$$n^2+n+p=\alpha\left(\alpha T^2-(2\beta+1)T+\frac{\beta^2+\beta+p}{\alpha}\right)$$

$$n^2+n+p=\alpha(\alpha T^2-(2\beta+1)T+x^2+x+p)$$

Así:

$$n^2+n+p=\alpha(\alpha T^2-(2\beta+1)T+x^2+x+p)$$

Por lo tanto:

n^2+n+p es factorizable en dos factores enteros:

$$f_1=\alpha=s^2x^2+s(s-2)x+ps^2-s+1$$

Y $f_2=f_1T^2-(2\beta+1)T+x^2+x+p$ con $\beta=sx^2+(s-1)x+sp-1$

Queda demostrado el Segundo Teorema de La Factorización de Cordero en los números enteros.

9.3 Demostración del Tercer Teorema de La Factorización de Cordero en los números enteros.

Sea $s,x,T\in\boldsymbol{Z}, s\neq 0$, $p\in\{3,5,11,17,41\}$

1) Si $n=\frac{x^2-x+p-1}{2}$ entonces $4n^2+4p-1$ es un número compuesto y dos de sus factores tienen la forma:

   $f_1=x^2-3x+p+2$ y $f_2=x^2+x+p$

2) Si $n=[s^2x^2+s(s-2)x+ps^2-s+1]*T\pm\left[\frac{s(3s-2)x^2+(3s^2-8s+2)x+ps(3s-2)-3s+4}{2}\right]$ entonces $4n^2+4p-1$ es un número compuesto y dos de sus factores tienen la forma:

   $f_1=s^2x^2+s(s-2)x+ps^2-s+1$ y

$$f_2 = 4f_1T^2 \pm 8T\beta + (3s-2)^2x^2 + (3s-2)(3s-8)x + \frac{(3s^2-8s+2)^2 + (3s-2)[3s^3(p-1) - s^2(2p-11) - 13s + 2]}{s^2}$$

Donde $\beta = \left[\frac{s(3s-2)x^2+(3s^2-8s+2)x+ps(3s-2)-3s+4}{2}\right]$

Demostración.

1) $n = \frac{x^2-x+p-1}{2}$

$$4n^2 + 4p - 1 = 4\left(\frac{x^2-x+p-1}{2}\right)^2 + 4p - 1$$

$$4n^2 + 4p - 1 = (x^2-x+p-1)^2 + 4p - 1$$

$$= x^4 + x^2 + (p-1)^2 - 2x^3 - 2x(p-1) + 2(p-1)x^2 + 4p - 1$$

$$= x^4 - 2x^3 + (2p-1)x^2 - 2(p-1)x + p^2 + 2p$$

Además:

$$(x^2-3x+p+2)(x^2+x+p) = x^4 + x^3 + px^2 - 3x^3 - 3x^2 - 3px + px^2 + px + p^2 + 2x^2 + 2x + 2p$$

$$= x^4 - 2x^3 + (2p-1)x^2 - 2(p-1)x + p^2 + 2p$$

Así:

$$4n^2 + 4p - 1 = (x^2-3x+p+2)(x^2+x+p) \quad con\ n = \frac{x^2-x+p-1}{2}$$

$$f_1 = x^2 - 3x + p + 2 \quad y \quad f_2 = x^2 + x + p$$

2) $n = [s^2x^2 + s(s-2)x + ps^2 - s + 1] * T \pm \left[\frac{s(3s-2)x^2+(3s^2-8s+2)x+ps(3s-2)-3s+4}{2}\right]$

$$n = \alpha T \pm \beta \quad con\ \alpha = s^2x^2 + s(s-2)x + ps^2 - s + 1$$

$$\beta = \frac{s(3s-2)x^2 + (3s^2-8s+2)x + ps(3s-2) - 3s + 4}{2}$$

Tenemos que:

$$4n^2 + 4p - 1 = 4(\alpha T \pm \beta)^2 + 4p - 1$$

$$= 4(\alpha^2 T^2 \pm 2\alpha T\beta + \beta^2) + 4p - 1$$
$$= 4\alpha^2 T^2 \pm 8\alpha T\beta + 4\beta^2 + 4p - 1$$
$$= \alpha\left(4\alpha T^2 \pm 8T\beta + \frac{4\beta^2+4p-1}{\alpha}\right)$$

Demostraremos que $4\beta^2 + 4p - 1$ es divisible por α.

$$4\beta^2 + 4p - 1 = 4\left(\frac{s(3s-2)x^2 + (3s^2-8s+2)x + ps(3s-2) - 3s + 4}{2}\right)^2 + 4p - 1$$

$$= (s(3s-2)x^2 + (3s^2-8s+2)x + ps(3s-2) - 3s + 4)^2 + 4p - 1$$

$$= s^2(3s-2)^2x^4 + (3s^2-8s+2)^2x^2 + \left(ps(3s-2) - (3s-4)\right)^2 + 2s(3s-2)(3s^2-8s+2)x^3 + 2(3s^2-8s+2)(ps(3s-2) - 3s + 4)x + 2s(3s-2)(ps(3s-2) - 3s + 4))x^2 + 4p - 1$$

$$= s^2(3s-2)^2x^4 + (3s^2-8s+2)^2x^2 + p^2s^2(3s-2)^2 - 2ps(3s-2)(3s-4) + (3s-4)^2 + 2s(3s-2)(3s^2-8s+2)x^3 + 2(3s^2-8s+2)\left(ps(3s-2) - (3s-4)\right)x + 2s(3s-2)\left(ps(3s-2) - (3s-4)\right)x^2 + 4p - 1$$

$$= s^2(3s-2)^2x^4 + 2s(3s-2)(3s^2-8s+2)x^3 + \left((3s^2-8s+2)^2 + 2s(3s-2)(ps(3s-2) - 3s + 4)\right)x^2 + 2(3s^2-8s+2)\left(ps(3s-2) - (3s-4)\right)x + p^2s^2(3s-2)^2 - 2ps(3s-2)(3s-4) + (3s-4)^2 + 4p - 1$$

$$= s^2(3s-2)^2x^4 + 2s(3s-2)(3s^2-8s+2)x^3 + \left((3s^2-8s+2)^2 + \left(2s(3s-2)(3s^2p - 2sp - 3s + 4)\right)\right)x^2 + 2(3s^2-8s+2)(3s^2p - 2sp - 3s + 4)x + p^2s^2(3s-2)^2 - 2ps(3s-2)(3s-4) + (3s-4)^2 + 4p - 1 \quad (*)$$

Dividimos (*) entre $\alpha = s^2x^2 + s(s-2)x + ps^2 - s + 1$ (**) y debemos obtener:

$$(3s-2)^2x^2 + (3s-2)(3s-8)x + \frac{(3s^2-8s+2)^2 + (3s-2)[3s^3p - 3s^3 - 2s^2p + 11s^2 - 13s + 2]}{s^2} (***)$$

$$s^2(3s-2)^2x^4+2s(3s-2)(3s^2-8s+2)x^3+\left((3s^2-8s+2)^2+\left(2s(3s-2)(3s^2p-2sp-3s+4)\right)\right)x^2+2(3s^2-8s+2)(3s^2p-2sp-3s+4)x+p^2s^2(3s-2)^2-2ps(3s-2)(3s-4)+(3s-4)^2+4p-1 \;\lfloor\; \underline{s^2x^2+s(s-2)x+ps^2-s+1}$$

$$\underline{-s^2(3s-2)^2x^4-s(s-2)(3s-2)\,x^3-(ps^2-s+1)(3s-2)^2\,x^2} \qquad (3s-2)^2x^2+(3s-2)(3s-8)x+\frac{[(3s^2-8s+2)^2+(3s-2)(3ps^3-2ps^2-3s^3+11s^2-13s+2)]}{s^2}$$

$$s^2(3s-2)(3s-8)x^3+[(3s^2-8s+2)^2+(3s-2)(3ps^3-2ps^2-3s^2+3s+2)]x^2+2(3s^2-8s+2)(3s^2p-2sp-3s+4)x$$

$$\underline{-\ s^2(3s-2)(3s-8)x^3-s(s-2)(3s-2)(3s-8d)x^2-(ps^2-s+1)(3s-2)(3s-8)x}$$

$$[(3s^2-8s+2)^2+(3s-2)(3ps^3-2ps^2-3s^3+11s^2-13s+2)]x^2+[2(3s^2-8s+2)(3s^2p-2sp-3s+4)-(ps^2-s+1)(3s-2)(3s-8)]x+p^2s^2(3s-2)^2-2ps(3s-2)(3s-4)+(3s-4)^2+4p-1$$

$$\underline{-\ [(3s^2-8s+2)^2+(3s-2)(3ps^3-2ps^2-3s^3+11s^2-13s+2)]x^2-[2(3s^2-8s+2)(3s^2p-2sp-3s+4)-(ps^2-s+1)(3s-2)(3s-8)]x-p^2s^2(3s-2)^2-2ps(3s-2)(3s-4)+(3s-4)^2+4p-1}$$

$$0$$

Luego:

$$\alpha\left(4\alpha T^2 \pm 8T\beta + \frac{4\beta^2+4p-1}{\alpha}\right) = \alpha\left(4\alpha T^2 \pm 8T\beta + (3s-2)^2x^2+(3s-2)(3s-8)x + \frac{[(3s^2-8s+2)^2+(3s-2)(3ps^3-2ps^2-3s^3+11s^2-13s+2)]}{s^2}\right)$$

Obteniéndose que:

$4n^2+4p-1$ es un número compuesto y dos de sus factores tienen la forma:

$$f_1=\alpha=s^2x^2+s(s-2)x+ps^2-s+1 \quad y$$

$$f_2 = 4f_1T^2 \pm 8T\beta + (3s-2)^2x^2+(3s-2)(3s-8)x + \frac{(3s^2-8s+2)^2+(3s-2)[3s^3(p-1)-s^2(2p-11)-13s+2]}{s^2}$$

Donde $\beta = \left[\frac{s(3s-2)x^2+\left(3s^2-8s+2\right)x+ps(3s-2)-3s+4}{2}\right]$

Queda demostrado el Tercer Teorema de la factorización de Cordero en el conjunto de los números enteros.

9.4 Demostración del cuarto Teorema de La Factorización de Cordero en los números enteros.

Sea $s,x,T\in\mathbb{Z}, s\neq 0$ $y\ p\in\{3,5,11,29\}$

1) Si $n=(4s^2x^2-4sx+2ps^2+1)*T \pm (2sx^2-x+sp)$

$entonces$: $2n^2+p$ es compuesto y dos de sus factores tienen la forma:

$$f_1=4s^2x^2-4sx+2ps^2+1$$

$$f_2 = \frac{2n^2+p}{f_1} = 2f_1T^2 \pm 4\beta T + 2x^2 + p$$

Con $\beta = 2sx^2-x+sp$

2) Si $n = (2x^2 + p) * T \pm (2sx^2 + x + sp)$

$entonces$: $2n^2 + p$ es compuesto y dos de sus factores tienen la forma:

$$f_1 = 2x^2 + p$$

$$f_2 = \frac{2n^2+p}{f_1} = 2f_1T^2 \pm 4\beta T + 2f_1s^2 + 4sx + 1$$

Con $\beta = 2sx^2 + x + sp$

Demostración.

Primera Parte.

Sea $s, x, T \in Z, s \neq 0$, $p \in \{3,5,11,29\}$

$$n = (4s^2x^2 - 4sx + 2ps^2 + 1) * T \pm (2sx^2 - x + sp) = \alpha * T + \beta$$

Donde **α**$= 4s^2x^2 - 4sx + 2ps^2 + 1$ y $\beta = 2sx^2 - x + sp$

1) $n = \alpha * T + \beta$

$$n^2 + n + p = 2(\alpha * T \pm \beta)^2 + p$$

$$n^2 + n + p = 2\alpha^2T^2 \pm 4\alpha\beta T + 2\beta^2 + p$$

$$n^2 + n + p = \alpha\left(2\alpha T^2 \pm 4\beta T + \frac{2\beta^2 + p}{\alpha}\right)$$

Pero:

$$2\beta^2 + p = 2(2sx^2 - x + sp)^2 + p$$

$$2\beta^2 + p = 2(4s^2x^4 + x^2 + s^2p^2 - 4sx^3 - 2spx + 4s^2px^2) + p$$

$$2\beta^2 + p = 8s^2x^4 + 2x^2 + 2s^2p^2 - 8sx^3 - 4spx + 8s^2px^2 + p$$

$$2\beta^2 + p = 8s^2x^4 - 8sx^3 + (8s^2p+2)x^2 - 4spx + 2s^2p^2 + p$$

Haciendo la división entre **α**$= 4s^2x^2 - 4sx + 2ps^2 + 1$

$$8s^2x^4 - 8sx^3 + (8s^2p{+}2)x^2 - 4spx + 2s^2p^2 + p \;\llcorner\; \underline{4s^2x^2 - 4sx + 2ps^2 + 1}$$

$$\underline{-8s^2x^4 + 8sx^3 - (4s^2p{+}2)x^2} \qquad\qquad 2x^2 + p$$

$$4s^2px^2 - 4spx + 2s^2p^2 + p$$

$$\underline{-4s^2px^2 + 4spx - 2s^2p^2 - p}$$

$$0$$

Tenemos:

$$\frac{2\beta^2 + p}{\alpha} = 2x^2 + p$$

Luego:

$$n^2 + n + p = \alpha\left(2\alpha T^2 \pm 4\beta T + \frac{2\beta^2 + p}{\alpha}\right)$$

$$n^2 + n + p = \alpha\left(2\alpha T^2 \pm 4\beta T + 2x^2 + p\right)$$

Por lo tanto;

$$n^2 + n + p = \alpha(2\alpha T^2 \pm 4\beta T + 2x^2 + p)$$

Es factorizable en dos factores y éstos tienen la forma:

$$\boldsymbol{\alpha} = f_1 = 4s^2x^2 - 4sx + 2ps^2 + 1$$

$$f_2 = 2f_1T^2 \pm 4\beta T + 2x^2 + p$$

Con $\beta = 2sx^2 - x + sp$

Segunda parte.

Sea $s, x, T \in Z, s \neq 0,\;\; p \in \{3,5,11,29\}$

$$n = (2x^2 + p) * T \pm\; (2sx^2 + x + sp)$$

Donde $\boldsymbol{\alpha} = 2x^2 + p \;\; y \;\; \beta = 2sx^2 + x + sp$

2) $\quad n = \alpha * T + \beta$

$$n^2 + n + p = 2(\alpha * T \pm \beta)^2 + p$$

$$n^2 + n + p = 2\alpha^2T^2 \pm 4\alpha\beta T + 2\beta^2 + p$$

$$n^2 + n + p = \alpha\left(2\alpha T^2 \pm 4\beta T + \frac{2\beta^2 + p}{\alpha}\right)$$

Pero:

$$2\beta^2 + p = 2(2sx^2 + x + sp)^2 + p$$

$$2\beta^2 + p = 2(4s^2x^4 + x^2 + s^2p^2 + 4sx^3 + 2spx + 4s^2px^2) + p$$

$$2\beta^2 + p = 8s^2x^4 + 2x^2 + 2s^2p^2 + 8sx^3 + 4spx + 8s^2px^2 + p$$

$$2\beta^2 + p = 8s^2x^4 + 8sx^3 + (8s^2p+2)x^2 + 4spx + 2s^2p^2 + p$$

Haciendo la división entre **α**$= 2x^2 + p$

$$8s^2x^4 + 8sx^3 + (8s^2p+2)x^2 + 4spx + 2s^2p^2 + p \;\llcorner\; \underline{2x^2 + P}$$

$$\underline{-8s^2x^4 + 0sx^3 - (4s^2p)x^2} \qquad\qquad 4s^2x^2 + 4sx + 2s^2p + 1$$

$$8sx^3 + (4s^2p + 2)x^2 + 4spx + 2s^2p^2 + p$$

$$\underline{-8sx^3 \quad - \quad 0 \quad - 4spx}$$

$$(4s^2p + 2)x^2 + 2s^2p^2 + p$$

$$\underline{-(4s^2p + 2)x^2 - 2s^2p^2 - p}$$

$$0$$

Luego:

$$\frac{2\beta^2 + p}{\alpha} = 4s^2x^2 + 4sx + 2s^2p + 1$$

Así:

$$n^2 + n + p = \alpha\left(2\alpha T^2 \pm 4\beta T + \frac{2\beta^2 + p}{\alpha}\right)$$

$$n^2 + n + p = \alpha\left(2\alpha T^2 \pm 4\beta T + 4s^2x^2 + 4sx + 2s^2p + 1\right)$$

$$n^2 + n + p = \alpha\left(2\alpha T^2 \pm 4\beta T + 2s^2(2x^2 + p) + 4sx + 1\right)$$

$$n^2 + n + p = \alpha\left(2\alpha T^2 \pm 4\beta T + 2s^2\alpha + 4sx + 1\right)$$

Luego $n^2 + n + p$ es factorizable en dos factores,

α= $f_1 = 2x^2 + p$ y $f_2 = 2f_1T^2 \pm 4\beta T + 2s^2 f_1 + 4sx + 1$

Queda demostrado el Cuarto Teorema de la Factorización de Cordero en los enteros.

9.5 Demostración del Quinto Teorema de La Factorización de Cordero en los números enteros.

Sea $s, x, T, r \in \mathbb{Z},\ s, r \neq 0\ \ y\ p \in \{2, 3,5,11,17,41\}$

Si $n = (s^2x^2 + sx + p)(r * T + 1) - r(sx + 1) + 1$ entonces

$n^2 + (r - 2)n + pr^2 - r + 1$ es un número compuesto y dos de sus factores tienen la forma:

$$f_1 = s^2x^2 + sx + p$$

$$f_2 = f_1(r * T + 1)^2 - r(2sx + 1)(r * T + 1) + r^2$$

Demostración.

Sea $s, x, T, r \in \mathbb{Z},\ s, r \neq 0\ \ y\ p \in \{2, 3,5,11,17,41\}$

$n = \alpha * K - r(sx + 1) + 1\ con\ \alpha = s^2x^2 + sx + p\ \ y\ \ K = r * T + 1$

Tenemos que:

$$n^2 + (r - 2)n + pr^2 - r + 1 = (\alpha * K - r(sx + 1) + 1)^2 + (r - 2)(\alpha * K - r(sx + 1) + 1) + pr^2 - r + 1$$

$$= \alpha^2K^2 + r^2(sx + 1)^2 + 1 + 2\alpha K - 2r(sx + 1) - 2\alpha Kr(sx + 1) + r\alpha K - r^2(sx + 1) + r - 2\alpha K + 2r(sx + 1) - 2 + pr^2 - r + 1$$

$$= \alpha^2K^2 + r^2(sx + 1)^2 - 2\alpha Kr(sx + 1) + r\alpha K - r^2(sx + 1) + r$$

$$= \alpha\left(\alpha K^2 - 2Kr(sx + 1) + rK + \frac{r^2(sx + 1)^2 - r^2(sx + 1) + r + pr^2 - r + 1}{\alpha}\right)$$

$$= \alpha\left(\alpha K^2 - 2Kr(sx + 1) + rK + \frac{r^2(s^2x^2 + 2sx + 1) - r^2sx - r^2 + r + pr^2 - r + 1}{s^2x^2 + sx + p}\right)$$

$$= \alpha\left(\alpha K^2 - Kr(2sx + 2 - 1) + \frac{r^2s^2x^2 + 2r^2sx - r^2sx + pr^2}{s^2x^2 + sx + p}\right)$$

$$= \alpha\left(\alpha K^2 - Kr(2sx + 1) + \frac{r^2s^2x^2 + r^2sx + pr^2}{s^2x^2 + sx + p}\right)$$

$$= \alpha\left(\alpha K^2 - Kr(2sx + 1) + \frac{r^2(s^2x^2 + sx + p)}{s^2x^2 + sx + p}\right)$$

$$= \alpha(\alpha K^2 - Kr(2sx + 1) + r^2)$$

Luego $n^2 + (r - 2)n + pr^2 - r + 1$ es factorizable y sus factores son:

$$\alpha = f_1 = s^2x^2 + sx + p$$

$$y \quad f_2 = \alpha K^2 - Kr(2sx + 1) + r^2 = f_1(r * T + 1)^2 - r(2sx + 1)(r * T + 1) + r^2$$

Queda demostrado el Quinto Teorema de la Factorización de Cordero en los números enteros.

Referencias bibliográficas.

Aznar, E. (2007). *Leonhard Euler Matemático (1707 Basilea. Suiza, 1783 San Petesburgo, Rusia*). https://www.ugr.es/eaznar/euler.htm

Camacho, J. y Camacho, O. (2020). *Dos Científicos Bajo Un Fresno: Un Viaje A La Ciencia. En Doce Escritos.* Google Books.

Fernández, T. y Tamaro, E. (2004). *Adrien-Marie Legendre.* https://www.biografíasyvidas.com/biografía/l/legendre.htm

Frases y pensamientos. (s.f.). *Frases de números primos*. https://www.frasesypensamientos.com.ar/frases-de-numeros-primos.html

Ayoub, R. and Chowla, S., *On Euler's polynomial.* J. Nb. Th., 13, 1981.

Borevish, Z. I. and Shafarevich, I. R. , *Number Theory.* Academic press, New York, 1966.

Cohn, H., *Advanced Number Theory.* Dover Publ., New York, 1962.

Goldfeld, D., *Gauss' class number problem for imaginary quadratic fields.* Bull. Amer. Math. Soc., 13, 1985.

Lehmer, D.H., *On the function* $x^2 + x + A$. Sphinx 6, 1936.

Paulo Ribenboim. *Revista Colombiana de matemáticas. Vol. XXI (1987).* Queen University. Kingston, Ontario, Canadá.