Primer Teorema de la Factorizaciòn de Cordero en los nùmeros enteros.

Ronald Cordero Méndez
Ronald.come@gmail.com

Resumen

Se presenta el Primer Teorema de la Factorización de Cordero en Z, Sea $r, s, x, k \in \mathbb{Z}$ $y\ p\ un\ número\ afortunado\ de\ Euler$. Si $\boldsymbol{n = ((rs - r + 1)^2 \bullet x^2 - (rs - r + 1)(rs - r + 2s - 1) \bullet x + p \bullet (rs - r + 1)^2 + (rs + s + 1)(s - 2) + r + 2))(k - 1) + r(rs - r + 1) \bullet x^2 - (r(r + 2)(s - 2) + r^2 + 3r + 1)x + pr(rs - r + 1) + (r + 1)(s - 1)}$ $entonces$: $n^2 + n + p$ es compuesto y dos de sus factores tienen la forma: $f_1 = \boldsymbol{(rs - r + 1)^2 \bullet x^2 - (rs - r + 1)(rs - r + 2s - 1) \bullet x + p \bullet (rs - r + 1)^2 + (rs + s + 1)(s - 2) + r + 2)}$ y $f_2 = \frac{n^2+n+p}{f_1} = \boldsymbol{f_1} * (k-1)^2 + (2\beta + 1)(k-1) + \boldsymbol{r^2x^2 - r(r + 2)x + pr^2 + r + 1}$. Si $\boldsymbol{n = ((rs - r + 1)^2 \bullet x^2 - (rs - r + 1)(rs - r + 2s - 1) \bullet x + p \bullet (rs - r + 1)^2 + (rs + s + 1)(s - 2) + r + 2))(k + 1) - (r(rs - r + 1) \bullet x^2 - (r(r + 2)(s - 2) + r^2 + 3r + 1)x + pr(rs - r + 1) + (r + 1)(s - 1) + 1)}$ entonces: $n^2 + n + p$ es compuesto y dos de sus factores tienen la forma: $f_1 = \boldsymbol{(rs - r + 1)^2 \bullet x^2 - (rs - r + 1)(rs - r + 2s - 1) \bullet x + p \bullet (rs - r + 1)^2 + (rs + s + 1)(s - 2) + r + 2)}$ y $f_3 = \frac{n^2+n+p}{f_1} = \boldsymbol{f_1} * (k+1)^2 - (2\beta + 1)(k+1) + \boldsymbol{r^2x^2 - r(r + 2)x + pr^2 + r + 1}$. Utilidad del Teorema para encontrar números primos de más de 100 dígitos. Construir códigos de seguridad usados en la criptografía.

Palabras clave: Factorización, números primos, números afortunados de Euler, Teorema.

1. Problemàtica de la Factorizaciòn de los nùmeros enteros.

No se ha encontrado un procedimiento eficiente para factorizar completamente (en sus factores primos) un nùmero entero muy grande. Los nùmeros enteros muy grandes màs difìciles de factorizar son aquellos que tienen solamente dos factores diferentes de uno y de aproximadamente el mismo tamaño.

En 1970 el lìmite era 20 dìgitos, luego con el mètodo de las fracciones continuas de Brillhart-Morrison se llegò a 50 dìgitos en 1980. En el año 1994 se logra factorizar nùmeros de 100 dìgitos por medio del mètodo de la criba cuadràtica de Carl Pomerance y luego se añaden mètodos de factorizaciòn de nùmeros enteros como el de cuerpos algebraicos de Pollard y el mètodo de Lenstra el cual utiliza curvas elípticas.

El algoritmo de criba cuadrática (QS), es un algoritmo de factorización de números enteros y en la práctica es el segundo método más rápido conocido superado en poco por la criba general del cuerpo de números. Es de propósito general, lo que significa que su tiempo de ejecución únicamente depende del tamaño del número entero y no sobre una estructura especial o de propiedades.

La factorización de curva elíptica de Lenstra o método de factorización de curva elíptica es un rápido algoritmo de tiempo de ejecución sub-exponencial para la factorización de enteros que utiliza curvas elípticas. Es el tercer método más rápido conocido de factorización, superado por el algoritmo de la criba cuadrática (QS) y por la criba general del cuerpo de números.

El método de factorización de curva elíptica es de propósito especial y el más adecuado para encontrar factores pequeños, útil para encontrar divisores que no superen los 20 o 25 dígitos, así como su tiempo de ejecución está dominado por el tamaño del factor más pequeño, en lugar de por el tamaño del número a factorizar. Frecuentemente este método se utiliza para eliminar factores pequeños de un entero muy grande con muchos factores; si el entero resultante es todavía compuesto, entonces solo tiene factores grandes y es factorizado mediante el uso de técnicas de propósito general. El factor más grande encontrado con este método cuenta con 75 dígitos y fue descubierto el 2 de agosto del 2012 por Samuel Wagstaff. Incrementando el número de curvas probadas se mejoran las posibilidades de encontrar un factor. Hay consenso de que la factorización de números es un problema difícil, pero los avances nos dan una esperanza, quizás haya una solución muy pronto.

La computación cuántica enfrenta el reto matemático de factorizar en números primos. Investigadores de la Universidad Politécnica de Madrid en España han abordado el reto de factorizar números muy grandes en sus factores primos utilizando un dispositivo cuántico que simula la aritmética, en vez de calcular.

Pero la complejidad para factorizar un número muy grande se ha aprovechado para realizar algoritmos de criptografía que permiten mantener información privada segura. La criptografía es el estudio de las técnicas matemáticas relacionadas con los aspectos de seguridad

informática tal como: la confidencialidad, la integridad de datos, la autenticidad y el no rechazo. Hay dos tipos de criptografía: criptografía simétrica o de clave privada y criptografia asimétrica o de clave pública. La principal aplicación de la criptografía es proteger la información para evitar que sea accesible a observadores no autorizados. Verificar que un mensaje no haya sido modificado intencionalmente por ejemplo. Es aquí donde la matemática juega un papel muy importante, y sobre todo los números primos muy grandes, puesto que los números primos muy grandes de más de 100 dígitos permiten formar semiprimos o biprimos que son el producto de dos números primos muy grandes y que sirven de códigos de seguridad, por su dificutad para ser factorizados.

2. Polinomios generadores de números primos

Los polinomios de la forma $P(n) = n^2 + n + p$ donde $\boldsymbol{p} \in \{\mathbf{3}, \mathbf{5}, \mathbf{11}, \mathbf{17}, \mathbf{41}\}$ son generadores de números primos, con el inconveniente de que los generan hasta un $n = p - 2$ cuando $n \in \mathbb{N}U\{0\}$

En el caso de $P(n) = n^2 + n + 41$ el polinomio genera números primos desde $n = 0$ $hasta$ $n = 41 - 2 = 39$, para el resto de los n naturales se obtienen números compuestos y números primos sin orden aparente. Estos números primos son:

$$41,\ 43, 47, 53, 61, 71, 83, 97, 113, 131, 151, 173, 197, 223, 251, 281, 313, 347, 383,$$
$$421, 461, 503, 547, 593, 641, 691, 743, 707, 853, 911, 971, 1033, 1097, 1163, 1231,$$
$$1301, 1373, 1447, 1523, 1601.$$

Otro polinomio de esta forma que genera números primos es $P(n) = n^2 + n + 17$ desde $n = 0$ $hasta$ $n = 17 - 2 = 15$, el cual fue descubierto por el matemático Adrien Marie Legendre:

> Legendre nació en París en el año 1752 en una familia rica. Recibió educación en el Collage Mazarin en París, y defendió su tesis en física y matemática en 1770. Murió en París en el año 1833, después de una larga y penosa enfermedad. Su viuda conservó cuidadosamente las pertenencias del matemático para preservar su memoria. El último lugar donde vivió fue en el pueblo de Auteuil en París, Francia. (Fernández y Tamaro, 2004, párr.1)

Los números primos han sido tema de muchas investigaciones, muchas repetitivas que contribuyen poco al tema, lo que verifica la frase del gran matemático Leonhard Euler que dice***:*** "Los matemáticos han intentado en vano, hasta la actualidad descubrir algún orden en la secuencia de números primos, y tenemos razones para creer que se trata de un misterio que la mente humana nunca resolverá" (Leonard Euler, 1707-1783, mencionado por Camacho y Camacho, 2020,p.85). Hasta el momento en el año 2020 este misterio no ha sido resuelto, por lo que creo que Euler puede estar en lo cierto. Leonhard Euler nació el 15 de abril de 1707 en Basilea, Suiza y murió el 18 de septiembre de 1782 en San Petersburgo, Rusia (Aznar 2007). Extraordinario matemático del siglo XVIII.

Otra frase que lo afirma dice:

> El encanto de los números primos consistía quizás en la imposibilidad de explicar en qué orden aparecen. Cada uno se dispersa a su antojo, cumpliendo la condición de no tener más divisores que el uno y él mismo. Aunque no cabe duda de que cuanto más grandes son, más difícil resulta encontrarlos, y es imposible predecir su aparición siguiendo ninguna regla…"La fórmula preferida del profesor" (Ogawa, 2003, mencionadado por Frases y Pensamientos, s.f., párr. 4)

Nuestra pregunta ahora es como encontrar números primos, si no es posible encontrar una fórmula polinomial o de otro tipo que nos genere todos y cada uno de los números primos, o por lo menos una fórmula que genere solamente números primos aunque no sean consecutivos. En algún momento dado aparecen los números compuestos que se mezclan con los números primos, por lo que me lleva a suponer que el cribado es una buena opción para encontrar números primos grandes.

Con ayuda de los polinomios $P(n) = n^2 + n + p$, donde $p = 2, 3, 5, 11, 17, 41$ que resulta ser polinomios que generan números primos cuando n toma valores desde $0\ hasta\ n = p - 2$, y luego generan números compuestos y primos mezclados, por lo que el problema de encontrar una fórmula que genere solamente números primos no lo resuelve este tipo de polinomios. Pero encontrar un fórmula que genere los números compuestos que son generados por estos polinomios es el tema de la investigación además de buscar un procedimiento que ayude a cribar los números primos.

3. Los números afortunados de Euler

Antes de definir los números afortunados de Euler, debemos definir los números de Heegner.
El matemático Rabinowitz demostró que $P(n) = n^2 + n + p$ da números primos para $n = 0, \dots, p - 2$ si y solo si $1 - 4p$ es el negativo de un número de Heegner, que son los únicos números positivos k, que cumplen no ser cuadrados perfectos y que en el anillo de enteros del cuerpo $\mathbb{Q}(\sqrt{-k})$ es de factorización única.
Los números de Heegner son: $1,2,3,7,11,19,43, 67,163$.
Además los números afortunados de Euler son los enteros positivos p, para los que $1 - 4p = -k$, siendo k un número de Heegner, y mediante comprobación obtenemos que los únicos posibles son $2, 3, 5, 11, 17, 41$ y el número de Heegner asociado al 41 es el 163, puesto que $1 - 4 * 41 = -163$.

4. Factorización de números de la forma $n^2 + n + p$, donde $p \in \{3, 5, 11, 17, 41\}$, $n \in Z$

Los números de la forma n^2+n+p donde $p \in \{3,5,11,17,41\}$, $n \in \boldsymbol{Z}$ pueden ser número primos o números compuestos, por lo que vale preguntarse si hay alguna forma de encontrar los factores de estos números compuestos. Las fórmulas aquí publicadas nos permiten encontrar una factorización de los números , $\boldsymbol{n^2+n+p}$**, donde** $\boldsymbol{p \in \{3,5,11,17,41\}}$, $\boldsymbol{n \in Z}$, aunque la factorización puede dar completa o no, resulta importante como primer paso para factorizar estos números sin la necesidad de divisiones sucesivas.

- **Primer Teorema de la factorización de Cordero en** $\boldsymbol{Z}$.

Sea $r,s,x,k \in \mathbb{Z}$ *y p un número afortunado de Euler*.

a) Si $\boldsymbol{n=[(rs-r+1)^2x^2-(rs-r+1)(rs-r+2s-1)x+p(rs-r+1)^2+(rs+s+1)(s-2)+r+2)](k-1)+r(rs-r+1)x^2-[r(r+2)(s-2)+r^2+3r+1]x+pr(rs-r+1)+(r+1)(s-1)}$

entonces: n^2+n+p es compuesto y dos de sus factores tienen la forma:

$$f_1=\boldsymbol{(rs-r+1)^2x^2-(rs-r+1)(rs-r+2s-1)x+p(rs-r+1)^2+(rs+s+1)(s-2)+r+2}$$

$$f_2=\frac{n^2+n+p}{f_1}=f_1*(k-1)^2+(2\beta+1)(k-1)+\boldsymbol{r^2x^2-r(r+2)x+pr^2+r+1}$$

b) Si Si $\boldsymbol{n=[(rs-r+1)^2x^2-(rs-r+1)(rs-r+2s-1)x+p(rs-r+1)^2+(rs+s+1)(s-2)+r+2)](k+1)-[r(rs-r+1)x^2-[r(r+2)(s-2)+r^2+3r+1]x+pr(rs-r+1)+(r+1)(s-1)+1]}$

entonces: n^2+n+p es compuesto y dos de sus factores tienen la forma:

$$f_1=\boldsymbol{(rs-r+1)^2\bullet x^2-(rs-r+1)(rs-r+2s-1)\bullet x+p\bullet(rs-r+1)^2+(rs+s+1)(s-2)+r+2}$$

$$f_3=\frac{n^2+n+p}{f_1}=f_1*(k+1)^2-(2\beta+1)(k+1)+\boldsymbol{r^2x^2-r(r+2)x+pr^2+r+1}$$

Nota: *r y s no pueden ser cero simultáneamente*.

También es importante aclarar que el teorema es válido en el conjunto de los números reales y en el conjunto de los números complejos.

5. **Factorización de** $\boldsymbol{f_1}$ **y de** $\boldsymbol{r^2x^2-r(r+2)x+pr^2+r+1}$ **:**

$$f_1=\boldsymbol{(rs-r+1)^2\bullet x^2-(rs-r+1)(rs-r+2s-1)\bullet x+p\bullet(rs-r+1)^2+(rs+s+1)(s-2)+r+2}$$

Utilizando una calculadora de factorización de números enteros para $\boldsymbol{f_1}$ y utilizando valores

grandes para las variables de $\boldsymbol{f_1}$ podemos obtener números primos tan grandes como la calculadora pueda soportar. Lo interesante de factorizar el factor f_1 es que esta tiene pocos factores y sus factores crecen rápidamente en la cantidad de sus dígitos.

- **Aplicaciones de la fórmula de $\boldsymbol{f_1}$**

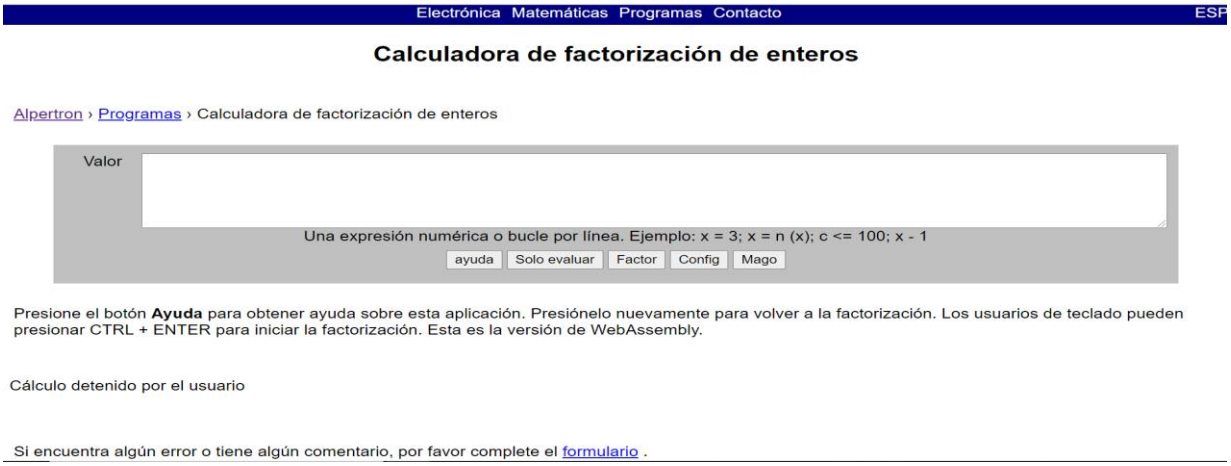
Utilizando la calculadora de factorización de enteros del Ingeniero Darío Alpern (Factorización mediante el método de curva elíptica) y las fórmulas;

a) $\boldsymbol{f_1 = (rs - r + 1)^2 \bullet x^2 - (rs - r + 1)(rs - r + 2s - 1) \bullet x + p \bullet (rs - r + 1)^2 + (rs + s + 1)(s - 2) + r + 2}$

b) $\boldsymbol{r^2x^2 - r(r + 2)x + pr^2 + r + 1}$

podemos obtener números primos muy grande de más de 100 dígitos.

Calculadora de factorización de enteros.
Ingeniero Darío Alpern
Argentina
(Factorización mediante el método de curva elíptica)



Puede localizar la calculadora de factorización de enteros de Darío Alpern en el siguiente enlace: https://www.alpertron.com.ar/CALTORS.HTM luego selecciona 4. Factorización mediante el método de curva elíptica. A continuación puede editar los siguientes ejemplos de aplicación de f_1 y $\boldsymbol{r^2x^2 - r(r + 2)x + pr^2 + r + 1}$.

Ejemplo 1

Sea $r = 67896432,\ s = 657453,\ \mathrm{x} = 89987654^{15}, p = 41.$
Luego:

$$f_1 = (67896432 * 657453 - 67896432 + 1)^2 * 89987654^{30} - (67896432 * 657453 - 67896432 + 1) * (67896432 * 657453 - 67896432 + 2 * 657453 - 1) * 89987654^{15} + 41 * (67896432 * 657453 - 67896432 + 1)^2 + (67896432 * 657453 + 657453 + 1) * (657453 - 2) + 67896432 + 2$$

$$= 84122060262791083292422641505752672813434422759256398909295528527$$
$$00503127912127788517372760843930792571905806394595294141297996153690$$
$$18093699814439919662783851615906537866457307117312430468435367776036$$
$$36088660110229025654957635145294531684052182469926481431776360840690$$

$$= 43 * 113$$
$$* 63133258255883 * 27422358112256178048649385697749821873412948727839$$
$$84486291242337016460839911956242829698161369406737282840953744070677$$
$$63701377226570593275494531573446459108039616016418238772922017214801$$
$$20978771339965362102581809856916769390656715579416160638231647 7$$

Genera el número primo:

$$27422358112256178048649385697749821873412948727839844862912423370164$$
$$08399119562428296981613694067372828409537440706776370137722657059327$$
$$49453157344645910803961601641823877292201721480120978771339965362102$$
$$58180985691676939065671557941616063823164 77$$ (249 dígitos).

Ejemplo 2

Factorizar: $\boldsymbol{r^2x^2 - r(r+2)x + pr^2 + r + 1}$

$$= 67896432^2 * 89987654^{30} - 67896432 * 67896434 * 89987654^{15} + 41 * 67896432^2 + 67896432 + 1$$

$$= 19461745942471934199152109440748025995927009884734458621204435$$

$$16176211833473883770735982855001475409557460794102643045658458 21$$

$$49817226746684509583956576921472719588046335307429316584320976 31$$

$$92556110016724191242301392696621547604779408130718868376282946929$$

$$= 167 * 6961$$

$$* 195029 * 744854181853 * 1152 45304479928815471582258280138705145$$

64773813209990874202817208615300879762082384364063734314873953 81

24357282020192441215603729531252239114036867140755594582523375 66

23887045417512790688593147106157874763743292040154598312199908791

Genera el número primo.

11524530447992881547158225828013870514564773813209990874202817 20

86153008797620823843640637343148739538124357282020192441215603 72

95312522391140368671407555945825233756623887045417512790688593 14

71061578747637432920401545983121999087 91 (232 dígitos).

Para formar códigos de seguridad informática se multiplican dos números primos muy grandes como los que se obtuvieron anteriormente:

Multiplicación de los dos números primos grandes:
27422358112256178048649385697749821873412948727839844862912423370164608399119562428296981613694067372828409537440706776370137722657059327549453157344645910803961601641823877292201721480120978771339965362102581809856916769390656715579416160638231647 7 *

11524530447992881547158225828013870514564773813209990874202817208615300879762082384364063734314873953812435728202019244121560372900879762082384364063734314873953812435728202019244121560372911405368671407555945825233756623887045417512790688593147106157874763743292040154598312199908791

=316029 801020 460921 134736 731741 219217 838615 090959 885851 315343 389157 859838 502661 843632 211091 380804 477579 545964 538984 435396 933184 356869 947851 379234 280365 798543 895782 754467 034242 330628 491936 765368 077033 564836 170914 716617 718796 192260 789724 674560 690465 519948 683286 994831 320645 405330 530847 419197 654167 360120 091917 854547 785170 691197 077984 830431 055243 438885 821321 818180 041033 753911 692008 538367 707157 770005 038519 180812 812299 857425 179266 622929 951520 982375 260497 295991 977125

584493 594696 449307[1]

Ejemplo 3

Sea $r = 67896432,\ s = 657453,\ \mathrm{x} = 899876^{28}, p = 17$

$$f_1 = (67896432 * 657453 - 67896432 + 1)^2 * 899876^{28} - (67896432 * 657453 - 67896432 + 1) * (67896432 * 657453 - 67896432 + 2 * 657453 - 1) * 899876^{14} + 17 * (67896432 * 657453 - 67896432 + 1)^2 + (67896432 * 657453 + 657453 + 1) * (657453 - 2) + 67896432 + 2$$

= 10388114882256959656284520362506683048769167590258150632653035156408082
40391620441922349397271092687268298745075859821583269684780808332534571504 6
65764059655607667974940993156272354736279182943 49

= 17 * 83 * 736223591938834844527605978916136289778112515255715849231256921
07782 299 106422 426784 007753173004442754663270380996443769189913875323056
877007193810472293384522159317855492073442406430636370159

Genera el número primo:

736223591938834844527605978916136289778112515255715849231256921077822991 0
6422426784 007753173004442754663270380996443769189913 875323 05687700719381
047229338452215931785549207344240643063637015 9 (191 dígitos)

Ejemplo 4

Sea $r = 67896432,\ s = 657453,\ \mathrm{x} = 899876^{26}, p = 17$

$$f_1 = (67896432 * 657453 - 67896432 + 1)^2 * 899876^{26} - (67896432 * 657453 - 67896432 + 1) * (67896432 * 657453 - 67896432 + 2 * 657453 - 1) * 899876^{13} + 17 * (67896432 * 657453 - 67896432 + 1)^2 + (67896432 * 657453 + 657453 + 1) * (657453 - 2) + 67896432 + 2$$

= 12828367872490265526098299720638114779575698809230155447686529 680127288
365787274798365092174722244610148985701679985249167577303684714232188703 1
350467508324259793409566416690011743 49

= 37 * 346712645202439608813467560017246345393937805654869066153689977513 85

[1] Se encontró multiplicado dos números primos de más de 200 dígitos cada uno, lo cual no fue problema para la calculadora de factorización de números de Darío Alpen, pero no logró factorizarlo.

753612374939134693268155330336381121347486940536553829074946941814657348298
144607229954709724146204497748378695 77

Genera el número primo:

346712645202439608813467560017246345393937805654869066153689977513857536 1
237493913469326815533033638112134748694053655382907494694181465734829814
460722995470972414620449774837869577 (175 dígitos)

Ejemplo 5

Sea $r = 67896432,\ s = 65745,\ \mathrm{x} = 899876^{24}, p = 41$

$$f_1 = (67896432 * 65745 - 67896432 + 1)^2 * 899876^{48} - (67896432 * 65745 - 67896432 + 1) * (67896432 * 65745 - 67896432 + 2 * 65745 - 1) * 899876^{24} + 41 * (67896432 * 65745 - 67896432 + 1)^2 + (67896432 * 65745 + 65745 + 1) * (65745 - 2) + 67896432 + 2$$

=125943069490245253540203143966794036594756476522691781712464194148000740
400063505568361519929884539339853738733856694909078488872071435882938212 7
862964616471390271911907702746232596802776690335642278743689180219148995 3
392319316718435895458981183519164750876146519838022809730305991543420624071
0555280201504800761

= 1277 * 986241734457676221927980767163618140914302870185526873237777557932
660457322345384247153640797842907908016748111642090125908291872133405504606
208193394374683939132272441427365883004544069452103087140754650885058064992
434793995044513382573138698787718461305884613926235145632756929643180941587
3966740814526609 3

Genera el número primo:

986241734457676221927980767163618140914302870185526873237777557932660457322
345384247153640797842907908016748111642090125908291872133405504606208 19
339437468393913227244142736588300454406945210308714075465088505806499243479
399504451338257313869878771846130588461392623514563275692964318094158739667
408145266093 (308 dígitos)

6. Método para encontrar números primos muy grandes.

El mètodo es un resultado del Primer Teorema de la Factorizaciòn de Cordero en los Nùmeros Enteros, y el estudio de la estructura de los factores de los nùmeros de la forma $n^2 + n + p$.

- **PRIMER MÉTODO PARA ENCONTRAR NÚMEROS PRIMOS MUY GRANDES UTILIZANDO EL PRIMER TEOREMA DE LA FACTORIZACIÓN DE CORDERO EN LOS ENTEROS.**

$Damos\ valores\ enteros\ a\ las\ variables\ r, s, x, k\ y\ p \in \{3,5,11,17,41\}, k \neq 1$

Calculamos:

$$f_0 = r^2x^2 - r(r+2)x + pr^2 + r + 1$$

$$f_1 = (rs - r + 1)^2x^2 - (rs - r + 1)(rs - r + 2s - 1)x + p(rs - r + 1)^2 + (rs + s + 1)(s - 2) + r + 2$$

$$n_0 = r(rs - r + 1)x^2 - (r(r+2)(s-2) + r^2 + 3r + 1)x + pr(rs - r + 1) + (s-1)(r+1)$$

Luego se calcula los valores de $f_2, f_3, f_4, \dots, f_i,\ f_{i+1}$ representados en la $TABLA$ #1

***TABLA* #1**

$f_2 = f_1(k-1)^2 + (2n_0 + 1)(k-1) + f_0$	$n_1 = f_1(k-1) + n_0$	$(n_1)^2 + n_1 + p = f_1 * f_2$	Comprobar si f_1 y f_2 son primos o compuestos
$f_3 = f_2(k-1)^2 + (2n_1 + 1)(k-1) + f_1$	$n_2 = f_2(k-1) + n_1$	$(n_2)^2 + n_2 + p = f_2 * f_3$	Comprobar si f_3 es primo o compuesto
$f_4 = f_3(k-1)^2 + (2n_2 + 1)(k-1) + f_2$	$n_3 = f_3(k-1) + n_2$	$(n_3)^2 + n_3 + p = f_3 * f_4$	Comprobar si f_4 es primo o compuesto
$f_5 = f_4(k-1)^2 + (2n_3 + 1)(k-1) + f_3$	$n_4 = f_4(k-1) + n_3$	$(n_4)^2 + n_4 + p = f_4 * f_5$	Comprobar si f_5 es primo o compuesto
.	.	.	
.	.	.	
.	.	.	
$f_i = f_{i-1}(k-1)^2 + (2n_{i-2} + 1)(k-1) + f_{i-2}$	$n_{i-1} = f_{i-1}(k-1) + n_{i-2}$	$(n_{i-1})^2 + n_{i-1} + p = f_{i-1} * f_i$	Comprobar si f_i ses primo o compuesto
$f_{i+1} = f_i(k-1)^2 + (2n_{i-1} + 1)(k+1) + f_{i-1}$	$n_i = f_i(k-1) + n_{i-1}$	$(n_i)^2 + n_i + p = f_i * f_{i+1}$	Comprobar si f_{i+1} es primo o compuesto

A continuación unos ejemplos de aplicación de las fórmulas dadas en la Tabla #1.

Ejemplo 1.

$Sea\ \ r = 200, \quad s = 851, \quad x = 325, \quad k = 756\ \ y\ \ p = 41$

$rs - r + 1 = 200 * 851 - 200 + 1 = 170001$
$rs - r + 2s - 1 = 200 * 851 - 200 + 2 * 851 - 1 = 171701$
$rs + s + 1 = 200 * 851 + 851 + 1 = 171052$

$f_0 = 200^2 * 325^2 - 200 * 202 * 325 + 41 * 200^2 + 200 + 1 = 4213510201$

$f_1 = 170001^2 * 325^2 - 170001 * 171701 * 325 + 41 * 170001^2 + 171052 * 849 + 200 + 2 = 3044296935716191$

$n_0 = 200 * 170001 * 325^2 - (200 * 202 * 849 + 200^2 + 3 * 200 + 1) * 325 + 41 * 200 * 170001 + 850 * 201 = 3581504738725$

Por el Primer Teorema de la Factorización de Cordero en los enteros: 3581504738725
$3581504738725^2 + 3581504738725 + 41 = 4213510201 * 3044296935716191$

$f_2 = 3044296935716191 * 755^2 + (2 * 3581504738725 + 1) * 755 + 4213510201$

$f_2 = 1735330768857990760481$

$n_1 = 3044296935716191 * 755 + 3581504738725 = 2298447767970462930$

Por el Primer Teorema de la factorización de Cordero en los enteros.

$2298447767970462930^2 + 2298447767970462930 + 41$

$= 5282862142088403001069800686474647871$

$= 3044296935716191 * 1735330768857990760481$

$f_3 = 1735330768857990760481 * 755^2 + (2 * 2298447767970462930 + 1) * 755 + 3044296935716191$

$= 989185392177450115577923271$

$n_2 = 1735330768857990760481 * 755 + 2298447767970462930$
$= 1310177028935550994626085$

Por el Primer Teorema de la factorización de Cordero en los enteros.

$1310177028935550994626085^2 + 1310177028935550994626085 + 41$

$= 1735330768857990760481 * 989185392177450115577923271$

$$f_4 = 98918539217745011557792327 1 * 755^2 + (2 * 131017702893555099462608 5 + 1) * 755 + 1735330768857990760481$$

$$= 563862381545000025583165588701361$$

$$n_3 = 98918539217745011557792327 1 * 755 + 131017702893555099462608 5$$
$$= 74683628127100377281232669569 0$$

Por el Primer Teorema de la factorización de Cordero en los enteros.

$$74683628127100377281232669569 0^{\,2} + 74683628127100377281232669569 0 + 41$$

$$= 98918539217745011557792327 1 * 563862381545000025583165588701361$$

$$f_5 = 563862381545000025583165588701361 * 755^2 + (2 * 74683628127100377281232669569 0 + 1) * 755 + 98918539217745011557792327 1$$

$$= 32141678176396254419091836142838 1719951$$

$$n_4 = 563862381545000025583165588701361 * 755 + 74683628127100377281232669569 0$$
$$= 42571684490275629031906283179622 3245$$

$$f_6 = 32141678176396254419091836142838 1719951 * 755^2 + (2 * 42571684490275629031906283179622 3245 + 1) * 755 + 563862381545000025583165588701361$$

$$= 18321624385800241479597162078367 2467800870841$$

$$n_5 = 32141678176396254419091836142838 1719951 * 755 + 42571684490275629031906283179622 3245$$

$$= 24267009594863662362043368194125 9994786250$$

$$f_7 = 18321624385800241479597162078367 2467800870841 * 755^2 + (2 * 24267009594863662362043368194125 9994786250 + 1) * 755 + 32141678176396254419091836142838 1719951$$

$$= 10443820583732412571713935253626 3548122\ 211910099231$$

$$n_6 = 1832162438580024147959716207836724678008708 41 * 755 + 2426700959486366236204336819412599947862 50 = 1383285067828877718075821941253546544496522712 05$$

$$f_8 = 1044382058373241257171393525362635481222119100992 31 * 755^2 + (2 * 1383285067828877718075821941253546544496522712 05 + 1) * 755 + 1832162438580024147959716207836724678008708 41$$

$$= 59\,532597158649143166305791293392729924675735497044541921$$

$$n_7 = 1044382058373241257171393525362635481222119100992 31 * 755 + 138328 506782887771807582194125354654449652271205$$

$$= 788509837356864978042120187470731041869244417771906 10$$

$$f_9 = 595325971586491431663057912933927299246757354970 44 541921 * 755^2 + (2 * 788509837356864978042120187470731041869244417771906 10 + 1) * 755 + 1044382058373241257171393525362635481222119100992 31$$

$$= 339351877604488569258224671678816383082368719307321104764391 11$$

$$n_8 = 59\,532597158649143166305791293392729924675735497044541921 * 755 + 78850\,983735\,686497\,804212\,018747\,073104\,186924\,441777\,190610$$

$$= 449471897057638387770586766385302581662343672247104063409 65$$

$$f_{10} = 339351877604488569258224671678816383082368719307321104764391 11 * 755^2 + (2 * 449471897057638387770586766385302581662343672247104063409 65 + 1) * 755 + 595325971586491431663057912933927299246757354970445419 21$$

$$= 193439732734658479696971543491397608486359466661347563225428236476 01$$

El resultado de todos los factores generados de acuerdo con las fórmulas de la Tabla #1, son:

$$f_0 = 4213510201$$
$$f_1 = 3044296935716191$$
$$f_2 = 1735330768857990760481$$
$$f_3 = 98918539217745011557792 3271$$
$$f_4 = 56386238154500002558316558870 1361$$
$$f_5 = 32141678176396254419091836142838 1719951$$
$$f_6 = 1832162438580024147959716207836724678008708 41$$
$$f_7 = 1044382058373241257171393525362635481222119100992 31$$
$$f_8 = 595325971586491431663057912933927299246757354970445419 21$$
$$f_9 = 339351877604488569258224671678816383082368719307321104764391 11$$
$$f_{10} = 193439732734658479696971543491397608486359466661347563225428236476 01$$

Factorizando todos estos factores con la calculadora de factorización de números enteros de Darío Alpern, obtenemos:

$$f_0 = 4213510201 = 6871 * 613231$$

Genera el número primo: $613231\ (6\ dígitos)$

$$f_1 = 3044296935716191 = 423347 * 7191020453$$

Genera el número primo: $7191020453\ (10\ dígitos)$

$$f_2 = 1735330768857990760481$$

Genera el número primo: $1735330768857990760481\ (22\ dígitos)$

$f_3 = 98918539217745011557792327 1$ =19592 038001 * 50489152385625271

Genera el número primo: 50489152385625271 (17 dígitos)

$$f_4 = 5638623815450000255831655887013 61 = 97651 * 577426121130351993920354721 1$$

Genera el número primo: $577426121130351993920354721 1\ (28\ dígitos)$

$$f_5 = 3214167817639625441909183614283817199 51 = 131 * 324171017 * 15009557729 * 504260759567076797$$

Genera el número primo: 504260759567076797 *(18 dígitos)*

$$f_6 = 1832162438580024147959716207836724678008708 41 = 47 * 9857 * 3954771182332944398428843543171015042 79$$

Genera el número primo:

$3954771182332944398428843543171015042 79\ (39\ dígitos)$

$$f_7 = 1044382058373241257171393525362635481222119100992 31 = 97 * 469613 * 728681 * 2057209212256349 * 1529437207536886832959$$

Genera el número primo: $1529437207536886832959\ (22\ dígitos)$

$$f_8 = 5953259715864914316630579129339272992467573549704454 1921 = 397 * 1499561641275797057085788193788229972913746486071650 93$$

Genera el número primo:

$1499561641275797057085788193788229972913746486071650 93\ (54\ dígitos)$

$$f_9 = 3393518776044885692582246716788163830823687193073211047643911 1 = 1\,867969 * 6533484379079888421299 * 27805821775317896420798246367419 81$$

Genera el número primo: $27805821775317896420798246367419 81\ (34\ dígitos)$

f_{10} =193439732734658479696971543491397608486359466661347563225428236476 01=41691132814560843962322 41 * 4639829135731678934848834 822476450195504961

Genera los número primos: 41691132814560843962322241 (25 dígitos)

463982913573167893484883482247645019550496 1 (43 dígitos)

- **SEGUNDO MÉTODO PARA ENCONTRAR NÚMEROS PRIMOS MUY GRANDES UTILIZANDO EL PRIMER TEOREMA DE LA FACTORIZACIÓN DE CORDERO EN LOS ENTEROS.**

$Damos\ valores\ enteros\ a\ las\ variables\ r, s, x, k\ y\ p \in \{3,5,11,17,41\}, k \neq 1$

Calculamos:

$$f_0 = r^2x^2 - r(r+2)x + pr^2 + r + 1$$

$$f_1 = (rs - r + 1)^2x^2 - (rs - r + 1)(rs - r + 2s - 1)x + p(rs - r + 1)^2 + (rs + s + 1)(s - 2) + r + 2$$

$$n_0 = r(rs - r + 1)x^2 - (r(r+2)(s-2) + r^2 + 3r + 1)x + pr(rs - r + 1) + (s - 1)(r + 1)$$

Luego se calcula los valores de $f_2, f_3, f_4, \dots, f_i,\ f_{i+1}$ representados en la $TABLA\ \#2$

TABLA #2

$f_2 = f_1(k+1)^2 - (2n_0 + 1)(k+1) + f_0$	$n_1 = f_1(k+1) - (n_0 + 1)$	$(n_1)^2 + n_1 + p = f_1 * f_2$	Comprobar si $f_1\ y\ f_2$ son primos o compuestos
$f_3 = f_2(k+1)^2 - (2n_1 + 1)(k+1) + f_1$	$n_2 = f_2(k+1) - (n_1 + 1)$	$(n_2)^2 + n_2 + p = f_2 * f_3$	Comprobar si f_3 es primo o compuesto
$f_4 = f_3(k+1)^2 - (2n_2 + 1)(k+1) + f_2$	$n_3 = f_3(k+1) - (n_2 + 1)$	$(n_3)^2 + n_3 + p = f_3 * f_4$	Comprobar si f_4 es primo o compuesto
$f_5 = f_4(k+1)^2 - (2n_3 + 1)(k+1) + f_3$	$n_4 = f_4(k+1) - (n_3 + 1)$	$(n_4)^2 + n_4 + p = f_4 * f_5$	Comprobar si f_5 es primo o compuesto
. . .	. . .	. . .	
$f_i = f_{i-1}(k+1)^2 - (2n_{i-2} + 1)(k+1) + f_{i-2}$	$n_{i-1} = f_{i-1}(k+1) - (n_{i-2} + 1)$	$(n_{i-1})^2 + n_{i-1} + p = f_{i-1} * f_i$	Comprobar si f_i ses primo o compuesto
$f_{i+1} = f_i(k+1)^2 - (2n_{i-1} + 1)(k+1) + f_{i-1}$	$n_i = f_i(k+1) - (n_{i-1} + 1)$	$(n_i)^2 + n_i + p = f_i * f_{i+1}$	Comprobar si f_{i+1} es primo o compuesto

Ejemplo 1.

$Sea\ \ r = 127, \quad s = 389, \quad x = 328, \quad k = 543\ \ y\ \ p = 11$

$rs - r + 1 = 127 * 389 - 127 + 1 = 49277$

$rs - r + 2s - 1 = 127 * 389 - 127 + 2 * 389 - 1 = 50053$

$rs + s + 1 = 127 * 389 + 389 + 1 = 49793$

$f_0 = 127^2 * 328^2 - 127 * 129 * 328 + 11 * 127^2 + 127 + 1 = 1730026259$

$$f_1 = 49277^2 * 328^2 - 49277 * 50053 * 328 + 11 * 49277^2 + 49793 * 387 + 127 + 2$$
$$= 260455644365407$$
$$n_0 = 127 * 49277 * 328^2 - (127 * 129 * 387 + 127^2 + 3 * 127 + 1) * 328 + 11 * 127 * 49277 + 388 * 128$$
$$= 671263811073$$

Por el Primer Teorema de la Factorización de Cordero en los enteros:

$$671263811073^2 + 671263811073 + 11 = 1730026259 * 260455644365407$$

$$f_2 = 260455644365407 * 544^2 - (2 * 671263811073 + 1) * 544 + 1730026259$$

$$= 77077471237624664243$$

$$n_1 = 260455644365407 * 544 - 671263811074 = 141687199270970334$$

Por el Primer Teorema de la factorización de Cordero en los enteros.

$$141687199270970334^2 + 141687199270970334 + 11$$

$$= 20075262437251656488221053179041901$$

$$= 260455644365407 * 77077471237624664243$$

$$f_3 = 77077471237624664243 * 544^2 - (2 * 141687199270970334 + 1) * 544 + 260455644365407$$

$$= 22809844372765341466057919$$

$$n_2 = 77077471237624664243 * 544 - 141687199270970335$$
$$= 41930002666068546377857$$

Por el Primer Teorema de la factorización de Cordero en los enteros.

$$41930002666068546377857^2 + 41930002666068546377857 + 11$$

$$= 1758125123576515407168623935342107383166290317$$

$$= 77077471237624664243 * 22809844372765341466057919$$

$$f_4 = 228098443727653414660579 19 * 544^2 - (2 * 41930002666068546377857 + 1) * 544 + 228098443727653414660579 19$$

$$= 675020848453286088075848187 2467$$

$$n_3 = 228098443727653414660579 19 * 544 - 41930002666068546377858$$

$$= 124085134087816796889891300 78$$

Por el Primer Teorema de la factorización de Cordero en los enteros.

$$124085134087816796889891300 78^{\,2} + 124085134087816796889891300 78 + 11$$

$$= 153971205015914740267776804226824828183284969328193416173$$

$$= 228098443727653414660579 19 * 675020848453286088075848187 2467$$

$$f_5 = 675020848453286088075848187 2467 * 544^2 - (2 * 124085134087816796889891300 78 + 1) * 544 + 228098443727653414660579 19$$

$$= 199761619763893780751340581270292 6623$$

$$n_4 = 675020848453286088075848187 2467 * 544 - 124085134087816796889891300 79$$

$$= 367210100707246753745292514949 1969$$

$$367210100707246753745292514949 1969^{\,2} + 367210100707246753745292514949 1969 + 11$$

$$= 675020848453286088075848187 2467 * 199761619763893780751340581270292 6623$$

El resultado de todos los factores generados en el ejemplo y de acuerdo con las fórmulas de la Tabla #2, son:

$$f_0 = 1730026259$$
$$f_1 = 260455644365407$$
$$f_2 = 77077471237624664243$$
$$f_3 = 228098443727653414660579 19$$
$$f_4 = 675020848453286088075848187 2467$$
$$f_5 = 199761619763893780751340581270292 6623$$

Factorizando todos estos factores con la calculadora de factorización de números enteros de Darío Alpern, obtenemos:

$f_0 = 1730026259 = 13 * 23 * 23 * 251567$
Genera el número primo: 251567 $(6\ dígitos)$

$f_1 = 260455644365407 = 401 * 783571 * 828917$
Genera el número primo: 828917 $(6\ dígitos)$

$f_2 = 77077471237624664243$ (es primo)
Genera el número primo: 77077471237624664243 $(20\ dígitos)$

$f_3 = 228098443727653414660579 19 = 97 * 2099 * 112030983692604438373$
Genera el número primo: 112030983692604438373 *(21 dígitos)*

$f_4 = 4349 * 15193 * 102160789616656593128231$

Genera el número primo: 102160789616656593128231 $(24\ dígitos)$

$f_5 = 917459 * 217733566038257601431061858099 7$

Genera el número primo: $217733566038257601431061858099 7$ *(31 dígitos)*

7. Caso particular de la fórmula. Para $k = 2$

Si utilizamos las fórmulas de la tabla #1 y sustituimos $k = 2$, se obtienen la fórmulas dadas en la tabla #3.

$$f_0 = r^2x^2 - r(r+2)x + pr^2 + r + 1$$
$$f_1 = (rs - r + 1)^2x^2 - (rs - r + 1)(rs - r + 2s - 1)x + p(rs - r + 1)^2 + (rs + s + 1)(s - 2) + r + 2$$
$$n_0 = r(rs - r + 1)x^2 - (r(r+2)(s-2) + r^2 + 3r + 1)x + pr(rs - r + 1) + (s - 1)(r + 1)$$

TABLA #3

$f_2 = f_1 + (2n_0 + 1) + f_0$	$n_1 = f_1 + n_0$	$(n_1)^2 + n_1 + p = f_1 * f_2$	Comprobar si f_1 y f_2 son primos o compuestos
$f_3 = f_2 + (2n_1 + 1) + f_1$	$n_2 = f_2 + n_1$	$(n_2)^2 + n_2 + p = f_2 * f_3$	Comprobar si f_3 es primo o compuesto
$f_4 = f_3 + (2n_2 + 1) + f_2$	$n_3 = f_3 + n_2$	$(n_3)^2 + n_3 + p = f_3 * f_4$	Comprobar si f_4 es primo o compuesto
$f_5 = f_4 + (2n_3 + 1) + f_3$	$n_4 = f_4 + n_3$	$(n_4)^2 + n_4 + p = f_4 * f_5$	Comprobar si f_5 es primo o compuesto
.	.	.	

. . $f_i = f_{i-1} + (2n_{i-2} + 1) + f_{i-2}$	. . $n_{i-1} = f_{i-1} + n_{i-2}$	. . $(n_{i-1})^2 + n_{i-1} + p = f_{i-1} * f_i$	Comprobar si f_i ses primo o compuesto
$f_{i+1} = f_i + (2n_{i-1} + 1) + f_{i-1}$	$n_i = f_i + n_{i-1}$	$(n_i)^2 + n_i + p = f_i * f_{i+1}$	Comprobar si f_{i+1} es primo o compuesto

Si partimos de la fórmula para f_2 de la tabla #1 y con $k = 2$, obtenemos:

$$f_2 = f_1 + (2n_0 + 1) + f_0$$

Y que se encuentra en la tabla # 3.

Además:

$$f_3 = f_2 + (2n_1 + 1) + f_1 = f_1 + (2n_0 + 1) + f_0 + (2(f_1 + n_0) + 1) + f_1$$
$$= 4f_1 + 4n_0 + 2 + f_0$$
$$f_3 = 4f_1 + 2(2n_0 + 1) + f_0$$

De forma similar:

$$f_4 = f_3 + (2n_2 + 1) + f_2 = 4f_1 + 2(2n_0 + 1) + f_0 + (2(f_2 + n_1) + 1) + f_2$$
$$= 4f_1 + 4n_0 + 2 + f_0 + 2f_2 + 2n_1 + 1 + f_2$$
$$= 4f_1 + 4n_0 + 2 + f_0 + 2(f_1 + (2n_0 + 1) + f_0) + 2(f_1 + n_0) + 1 + f_1 + (2n_0 + 1) + f_0$$

$$= 4f_1 + 4n_0 + 2 + f_0 + 2f_1 + 4n_0 + 2 + 2f_0 + 2f_1 + 2n_0 + 1 + f_1 + 2n_0 + 1 + f_0$$

$$= 9f_1 + 12n_0 + 6 + 4f_0$$
$$f_4 = 9f_1 + 6(2n_0 + 1) + 4f_0$$

De forma similar:

$$f_5 = f_4 + (2n_3 + 1) + f_3$$
$$= 9f_1 + 12n_0 + 6 + 4f_0 + (2(f_3 + n_2) + 1) + 4f_1 + 4n_0 + 2 + f_0$$

$$= 13f_1 + 16n_0 + 8 + 5f_0 + 2f_3 + 2n_2 + 1$$

$$= 13f_1 + 16n_0 + 8 + 5f_0 + 2(4f_1 + 4n_0 + 2 + f_0) + 2(f_2 + n_1) + \mathbf{1}$$

$$= 13f_1 + 16n_0 + 9 + 5f_0 + 8f_1 + 8n_0 + 4 + 2f_0 + 2f_2 + 2n_1$$

$$= 21f_1 + 24\mathrm{n}_0 + 13 + 7f_0 + 2(f_1 + (2n_0 + 1) + f_0) + 2(f_1 + n_0)$$

$$= 21f_1 + 24\mathrm{n}_0 + 13 + 7f_0 + 2f_1 + 4n_0 + 2 + 2f_0 + 2f_1 + 2n_0$$

$$= 25f_1 + 30\mathrm{n}_0 + 15 + 9f_0$$

$$f_5 = 25f_1 + 15(2n_0 + 1) + 9f_0$$

De forma similar se puede deducir que:

$$f_6 = 64f_1 + 40(2n_0 + 1) + 25f_0$$

$$f_7 = 169f_1 + 104(2n_0 + 1) + 64f_0$$

$$f_8 = 441f_1 + 273(2n_0 + 1) + 169f_0$$

Tenemos entonces que:

$$f_2 = f_1 + (2n_0 + 1) + f_0 = 1^2 * f_1 + 1 * 1 * (2n_0 + 1) + 1^2 * f_0$$

$$f_3 = 4f_1 + 4n_0 + 2 + f_0 = 2^2 * f_1 + 2 * 1 * (2n_0 + 1) + 1^2 * f_0$$

$$f_4 = 9f_1 + 6(2\mathrm{n}_0 + 1) + 4f_0 = 3^2 * f_1 + 3 * 2 * (2n_0 + 1) + 2^2 * f_0$$

$$f_5 = 25f_1 + 15(2n_0 + 1) + 9f_0 = 5^2 * f_1 + 5 * 3 * (2n_0 + 1) + 3^2 * f_0$$

$$f_6 = 64f_1 + 40(2n_0 + 1) + 25f_0 = 8^2 * f_1 + 8 * 5 * (2n_0 + 1) + 5^2 * f_0$$

$$f_7 = 169f_1 + 104(2n_0 + 1) + 64f_0 = 13^2 * f_1 + 13 * 8 * (2n_0 + 1) + 8^2 * f_0$$

$$f_8 = 441f_1 + 273(2n_0 + 1) + 169f_0 = 21^2 * f_1 + 21 * 13 * (2n_0 + 1) + 13^2 * f_0$$

Por lo que obtenemos la sucesión de Fibonacci (Leonardo de Pisa).

Leonardo de Pisa [Fibonacci]

(Leonardo Bigollo, llamado también Leonardo Fibonacci, Leonardo Pisano, Leonardo Bonacci o Fibonacci; Pisa, actual Italia, *c.* 1175 - *id.*, *c.* 1240) Matemático italiano que difundió en Occidente los conocimientos científicos del mundo árabe, los cuales recopiló en el *Liber Abaci* (*Libro del ábaco*). Popularizó el uso de las cifras árabes y expuso los principios de la trigonometría en su obra *Practica Geometriae* (*Práctica de la geometría*). Biografías y Vidas. com

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, \ldots$$

Deducimos que:

$$f_n = (F_{n+1})^2 * f_1 + F_{n+1} * F_n * (2n_0 + 1) + (F_n)^2 * f_0 \; donde \; n \in \mathbb{N}$$

Como $F_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}}$

$$f_n = \left(\frac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1} \sqrt{5}}\right)^2 * f_1 + \frac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1} \sqrt{5}} * \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}} * (2n_0 + 1) + \left(\frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}}\right)^2 * f_0 \; donde \; n \in \mathbb{N}$$

7.1 Aplicaciones del resultado.

$$f_n = (F_{n+1})^2 * f_1 + F_{n+1} * F_n * (2n_0 + 1) + (F_n)^2 * f_0 \; donde \; n \in \mathbb{N}$$

Ejemplo de aplicación.

$$\boldsymbol{sea\ r = 234971,\quad s = 8976543,\quad x = 43218765,\quad p = 41}$$

$$\boldsymbol{rs - r + 1} = 2109227050283$$
$$\boldsymbol{rs - r + 2s - 1} = 2109245003367$$
$$\boldsymbol{rs + s + 1} = 2109236261797$$

$$f_0 = r^2x^2 - r(r+2)x + pr^2 + r + 1$$
$$f_0 = 234971^2 * \mathbf{43218765}^2 - \mathbf{234971} * \mathbf{234973} * \mathbf{43218765} + 41 * 234971^2 + \mathbf{234972}$$

$$f_0 = 10312719974813794153011068 3$$

$$f_1 = (rs - r + 1)^2x^2 - (rs - r + 1)(rs - r + 2s - 1)x + p(rs - r + 1)^2 + (rs + s + 1)(s - 2) + r + 2$$

$$f_1 = 2109227050283^2 * 43218765^2 - 2109227050283 * 2109245003367 * 43218765 + 41 * 2109227050283^2 + 2109236261797 * 8976541 + 234973$$

$$= 830981508688148498211165899469428581159$$

$$n_0 = r(rs - r + 1)x^2 - (r(r+2)(s-2) + r^2 + 3r + 1)x + pr(rs - r + 1) + (s-1)(r+1)$$

$$n_0 = \mathbf{234971} * 2109227050283 * 43218765^2 - (\mathbf{234971} * \mathbf{234973} * \mathbf{8976541} + \mathbf{234971}^2 + 3 * \mathbf{234971} + 1) * 43218765 + 41 * \mathbf{234971} * 2109227050283 + \mathbf{8976542} * \mathbf{234972}$$

$$n_0 = 92572563988198854724774925282 5892$$

Luego:

$$f_n = (F_{n+1})^2 * f_1 + F_{n+1} * F_n * (2n_0 + 1) + (F_n)^2 * f_0$$

$$f_3 = 3^2 * 830981508688148498211165899469428581159 + 3 * 2 * (2 * 92572563988198854724774925282 5892 + 1) + 2^2 * 10312719974813794153011068 3$$

$f_3 = 74788346890641455931666490479482011583873$ (42 dígitos)

Además:

$$f_{18} = 2584^2 * 830981508688148498211165899496942858115 9 + 2584 * 1597 * (2 * 92572563988198854724774925282589 2 + 1) + 1597^2 * 10312719974813794153011 0683$$

$$f_{18} = 54851083250405243407134768567138301433833739 31(46 \text{ dígitos})$$

8. Demostración del Teorema.

PRIMER TEOREMA DE LA FACTORIZACIÒN DE CORDERO EN LOS NÚMEROS ENTEROS

Sea $r, s, x, k \in \mathbb{Z}$ *y p un número afortunado de Euler*.

a) Si $\boldsymbol{n = [(rs - r + 1)^2 x^2 - (rs - r + 1)(rs - r + 2s - 1)x + p(rs - r + 1)^2 + (rs + s + 1)(s - 2) + r + 2)](k - 1) + r(rs - r + 1)x^2 - [r(r + 2)(s - 2) + r^2 + 3r + 1]x + pr(rs - r + 1) + (r + 1)(s - 1)}$

entonces: $n^2 + n + p$ es compuesto y dos de sus factores tienen la forma:

$$f_1 = \boldsymbol{(rs - r + 1)^2 x^2 - (rs - r + 1)(rs - r + 2s - 1)x + p(rs - r + 1)^2 + (rs + s + 1)(s - 2) + r + 2}$$

$$f_2 = \frac{n^2+n+p}{f_1} = f_1 * (k - 1)^2 + (2\beta + 1)(k - 1) + \boldsymbol{r^2 x^2 - r(r + 2)x + pr^2 + r + 1}$$

b) Si Si $\boldsymbol{n = [(rs - r + 1)^2 x^2 - (rs - r + 1)(rs - r + 2s - 1)x + p(rs - r + 1)^2 + (rs + s + 1)(s - 2) + r + 2)](k + 1) - [r(rs - r + 1)x^2 - [r(r + 2)(s - 2) + r^2 + 3r + 1]x + pr(rs - r + 1) + (r + 1)(s - 1) + 1]}$

entonces: $n^2 + n + p$ es compuesto y dos de sus factores tienen la forma:

$$f_1 = \boldsymbol{(rs - r + 1)^2 \bullet x^2 - (rs - r + 1)(rs - r + 2s - 1) \bullet x + p \bullet (rs - r + 1)^2 + (rs + s + 1)(s - 2) + r + 2}$$

$$f_3 = \frac{n^2+n+p}{f_1} = f_1 * (k + 1)^2 - (2\beta + 1)(k + 1) + \boldsymbol{r^2 x^2 - r(r + 2)x + pr^2 + r + 1}$$

Nota: *r y s no pueden ser cero simultáneamente*.
También es importante aclarar que el teorema es válido en el conjunto de los números reales y en el conjunto de los números complejos.

DEMOSTRACIÓN.

Tenemos que: $r, s, x, k \in \mathbb{Z}$ *y p un número afortunado de Euler*

Sea $f_1 = (\boldsymbol{rs - r + 1})^2 \bullet \boldsymbol{x^2} - (\boldsymbol{rs - r + 1})(\boldsymbol{rs - r + 2s - 1}) \bullet \boldsymbol{x + p} \bullet (\boldsymbol{rs - r + 1})^2 + (\boldsymbol{rs + s + 1})(\boldsymbol{s - 2}) + \boldsymbol{r + 2}$ (*)

Y $\beta = \boldsymbol{r(rs - r + 1)} \bullet \boldsymbol{x^2} - (\boldsymbol{r(r + 2)(s - 2) + r^2 + 3r + 1})\boldsymbol{x + pr(rs - r + 1) + (r + 1)(s - 1)}$ (**)

CASO 1

$$n = f_1(k - 1) + \beta$$

Así:

$$n^2 + n + p = (f_1(k - 1) + \beta)^2 + f_1(k - 1) + \beta + p$$

$$n^2 + n + p = (f_1)^2(k - 1)^2 + 2f_1 * \beta(k - 1) + \beta^2 + f_1(k - 1) + \beta + p$$

$$n^2 + n + p = f_1\big(f_1(k - 1)^2 + 2\beta(k - 1) + (k - 1)\big) + \beta^2 + \beta + p)$$

$$n^2 + n + p = f_1\left(f_1(k - 1)^2 + (2\beta + 1)(k - 1) + \frac{(\beta^2 + \beta + p)}{f_1}\right)$$

Demostraremos que:

$$\frac{(\beta^2 + \beta + p)}{f_1} = \boldsymbol{r^2x^2 - r(r + 2)x + pr^2 + r + 1} \in \mathbb{Z}$$

Por (**)

$$\beta = \boldsymbol{r(rs - r + 1)} \bullet \boldsymbol{x^2} - (\boldsymbol{r(r + 2)(s - 2) + r^2 + 3r + 1})\boldsymbol{x + pr(rs - r + 1) + (r + 1)(s - 1)}$$

$$\beta = \big(\boldsymbol{r^2s - r^2 + r}\big) \bullet \boldsymbol{x^2} - \Big(\big(\boldsymbol{r^2 + 2r}\big)\boldsymbol{(s - 2) + r^2 + 3r + 1}\Big)\boldsymbol{x + p}\big(\boldsymbol{r^2s - r^2 + r}\big) + \boldsymbol{rs - r + s - 1}$$

$$\beta = \boldsymbol{r^2x^2s - r^2x^2 + rx^2} - \big(\boldsymbol{r^2s + 2rs - r^2 - r + 1}\big)\boldsymbol{x + pr^2s - pr^2 + pr + rs - r + s - 1}$$

$$\beta = \boldsymbol{r^2x^2s - r^2x^2 + rx^2 - r^2sx - 2rsx + r^2x + rx - x + pr^2s - pr^2 + pr + rs - r + s - 1}$$

$$\beta = \big(\boldsymbol{r^2x^2 - r(r + 2)x + pr^2 + r + 1}\big)\boldsymbol{s} - \big(\boldsymbol{r^2x^2 - r^2x - rx - rx^2 + pr^2 - pr + x + r + 1}\big)$$

$$\beta = \boldsymbol{u * s} - \Big(\big(\boldsymbol{x^2 - x + p}\big)\boldsymbol{r^2} - \big(\boldsymbol{x^2 + x + p}\big)\boldsymbol{r} + \boldsymbol{(x + r + 1)}\Big)$$

Con $u = \boldsymbol{r^2x^2 - r(r + 2)x + pr^2 + r + 1}$

Luego:

$$\beta^2 = u^2s^2 - 2u\Big(\big(\boldsymbol{x^2 - x + p}\big)\boldsymbol{r^2} - \big(\boldsymbol{x^2 + x + p}\big)\boldsymbol{r} + \boldsymbol{(x + r + 1)}\Big)s + \Big(\big(\boldsymbol{x^2 - x + p}\big)\boldsymbol{r^2} - \big(\boldsymbol{x^2 + x + p}\big)\boldsymbol{r} + \boldsymbol{(x + r + 1)}\Big)^2$$

Además:

$$\beta^2 + \beta + p = u^2s^2 - u\Big(\boldsymbol{2}\big(\boldsymbol{x^2 - x + p}\big)\boldsymbol{r^2} - \boldsymbol{2}\big(\boldsymbol{x^2 + x + p}\big)\boldsymbol{r} + \boldsymbol{2(x + r + 1)}\Big)s + \Big(\big(\boldsymbol{x^2 - x + p}\big)\boldsymbol{r^2} - \big(\boldsymbol{x^2 + x + p}\big)\boldsymbol{r} + \boldsymbol{(x + r + 1)}\Big)^2 + \boldsymbol{u * s} - \Big(\big(\boldsymbol{x^2 - x + p}\big)\boldsymbol{r^2} - \big(\boldsymbol{x^2 + x + p}\big)\boldsymbol{r} + \boldsymbol{(x + r + 1)}\Big) + p$$

$$\beta^2 + \beta + p = u^2s^2 - u\big(\boldsymbol{2}\big(\boldsymbol{x^2 - x + p}\big)\boldsymbol{r^2} - \boldsymbol{2}\big(\boldsymbol{x^2 + x + p}\big)\boldsymbol{r} + \boldsymbol{2(x + r) + 1}\big)s + \Big(\big(\boldsymbol{x^2 - x + p}\big)\boldsymbol{r^2} - \big(\boldsymbol{x^2 + x + p}\big)\boldsymbol{r} + \boldsymbol{(x + r + 1)}\Big)^2 - \Big(\big(\boldsymbol{x^2 - x + p}\big)\boldsymbol{r^2} - \big(\boldsymbol{x^2 + x + p}\big)\boldsymbol{r} +$$

$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}+\boldsymbol{1})\big)+p$

Por otro lado:

$$f_1=(\boldsymbol{rs}-\boldsymbol{r}+\boldsymbol{1})^{\boldsymbol{2}}\bullet\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{2}}-(\boldsymbol{rs}-\boldsymbol{r}+\boldsymbol{1})(\boldsymbol{rs}-\boldsymbol{r}+\boldsymbol{2s}-\boldsymbol{1})\bullet\boldsymbol{x}+\boldsymbol{p}\bullet(\boldsymbol{rs}-\boldsymbol{r}+\boldsymbol{1})^{\boldsymbol{2}}+(\boldsymbol{rs}+\boldsymbol{s}+\boldsymbol{1})(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{2})+\boldsymbol{r}+\boldsymbol{2})$$

$$f_1=(rs-r)^2x^2+2(rs-r)\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{2}}+\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{2}}-\big(\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{2}}-\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{s}+\boldsymbol{2rs}^{\boldsymbol{2}}-\boldsymbol{rs}-\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{s}+\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{2}}-\boldsymbol{2rs}+\boldsymbol{r}+\boldsymbol{rs}-\boldsymbol{r}+\boldsymbol{2s}-\boldsymbol{1}\big)\bullet\boldsymbol{x}+(rs-r)^2p+2(rs-r)\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}+\boldsymbol{rs}^{\boldsymbol{2}}-\boldsymbol{2rs}+\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{2}}-\boldsymbol{2s}+\boldsymbol{s}-\boldsymbol{2}+\boldsymbol{r}+\boldsymbol{2}$$

$$f_1=r^2s^2x^2-2r^2sx^2+r^2x^2+2rsx^2-2rx^2+\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{2}}-\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{2r}^{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{sx}-\boldsymbol{2rs}^{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{2sx}+\boldsymbol{x}+r^2s^2p-2r^2sp+r^2p+2rsp-2rp+\boldsymbol{p}+\boldsymbol{rs}^{\boldsymbol{2}}-\boldsymbol{2rs}+\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{2}}-\boldsymbol{s}+\boldsymbol{r}$$

$$f_1=(r^2x^2-r^2x-2rx+pr^2+r+1)s^2-(2r^2x^2-2rx^2-2r^2x+2x+2r^2p-2rp+2r+1)s+r^2x^2-2rx^2+\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{2}}-\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}+r^2p-2rp+\boldsymbol{p}+\boldsymbol{r}$$

$$f_1=u*s^2-\big(\boldsymbol{2}\big(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{2}}-\boldsymbol{x}+\boldsymbol{p}\big)\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{2}}-\boldsymbol{2}\big(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{2}}+\boldsymbol{x}+\boldsymbol{p}\big)\boldsymbol{r}+\boldsymbol{2}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})+\boldsymbol{1}\big)s+(r^2-2r+1)x^2+(r^2-2r+1)p-(r^2x-x-r)$$

Ahora comprobemos que:

$$\big((r^2-2r+1)x^2+(r^2-2r+1)p-(r^2x-x-r)\big)*\big(\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{2}}-\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{2})\boldsymbol{x}+\boldsymbol{pr}^{\boldsymbol{2}}+\boldsymbol{r}+\boldsymbol{1}\big)=\Big(\big(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{2}}-\boldsymbol{x}+\boldsymbol{p}\big)\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{2}}-\big(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{2}}+\boldsymbol{x}+\boldsymbol{p}\big)\boldsymbol{r}+(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}+\boldsymbol{1})\Big)^2-\Big(\big(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{2}}-\boldsymbol{x}+\boldsymbol{p}\big)\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{2}}-\big(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{2}}+\boldsymbol{x}+\boldsymbol{p}\big)\boldsymbol{r}+(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}+\boldsymbol{1})\Big)+p$$

Desarrollemos el lado izquierdo de la igualdad.

$$\big((r^2-2r+1)x^2+(r^2-2r+1)p-(r^2x-x-r)\big)*\big(\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{2}}-\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{2})\boldsymbol{x}+\boldsymbol{pr}^{\boldsymbol{2}}+\boldsymbol{r}+\boldsymbol{1}\big)$$

$$=(r^2x^2-2rx^2+x^2+r^2p-2rp+p-r^2x+x+r)*\big(\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{2}}-\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{2rx}+\boldsymbol{pr}^{\boldsymbol{2}}+\boldsymbol{r}+\boldsymbol{1}\big)$$

$$=r^4x^4-r^4x^3-2r^3x^3+pr^4x^2+r^3x^2+r^2x^2-2r^3x^4+2r^3x^3+4r^2x^3-2pr^3x^2-2r^2x^2-2rx^2+r^2x^4-r^2x^3-2rx^3+pr^2x^2+rx^2+x^2+pr^4x^2-r^4px-2r^3px+r^4p^2+r^3p+r^2p-2r^3px^2+2r^3px+4r^2px-2r^3p^2-2r^2p-2rp+\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{p}-\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{xp}-\boldsymbol{2rxp}+\boldsymbol{p}^{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{2}}+\boldsymbol{rp}+\boldsymbol{p}-\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{4}}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{3}}+\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{4}}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{2}}+\boldsymbol{2r}^{\boldsymbol{3}}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{2}}-\boldsymbol{pr}^{\boldsymbol{4}}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{3}}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{3}}-\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{2}}-\boldsymbol{2rx}^{\boldsymbol{2}}+\boldsymbol{pr}^{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{rx}+\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{3}}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{2}}-\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{3}}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{2r}^{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{pr}^{\boldsymbol{3}}+\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{2}}+\boldsymbol{r}$$

$$=r^4x^4-2r^4x^3+2pr^4x^2+4r^3x^2-2r^3x^4+4r^2x^3-4pr^3x^2-2r^2x^2-3rx^2+r^2x^4-2rx^3+2pr^2x^2+x^2-2r^4px+r^4p^2+2r^3p+4r^2px-2r^3p^2-r^2p-rp-\boldsymbol{2rxp}+\boldsymbol{p}^{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{2}}+\boldsymbol{p}+\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{4}}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{2}}-\boldsymbol{2r}^{\boldsymbol{3}}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{3r}^{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{rx}+\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{2}}+\boldsymbol{r}\quad(1)$$

Desarrollemos el otro lado de la igualdad.

$$=\Big(\big(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{2}}-\boldsymbol{x}+\boldsymbol{p}\big)\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{2}}-\big(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{2}}+\boldsymbol{x}+\boldsymbol{p}\big)\boldsymbol{r}+(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}+\boldsymbol{1})\Big)^2-\Big(\big(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{2}}-\boldsymbol{x}+\boldsymbol{p}\big)\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{2}}-\big(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{2}}+\boldsymbol{x}+\boldsymbol{p}\big)\boldsymbol{r}+(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}+\boldsymbol{1})\Big)+p$$

$$=\big(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{2}}-\boldsymbol{x}+\boldsymbol{p}\big)^2r^4-2\big(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{2}}-\boldsymbol{x}+\boldsymbol{p}\big)\big(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{2}}+\boldsymbol{x}+\boldsymbol{p}\big)\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{3}}+\big(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{2}}+\boldsymbol{x}+\boldsymbol{p}\big)^{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{2}}+\boldsymbol{2}\Big(\big(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{2}}-\boldsymbol{x}+\boldsymbol{p}\big)\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{2}}-\big(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{2}}+\boldsymbol{x}+\boldsymbol{p}\big)\boldsymbol{r}\Big)(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}+\boldsymbol{1})+(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}+\boldsymbol{1})^2-\big(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{2}}-\boldsymbol{x}+\boldsymbol{p}\big)\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{2}}+\big(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{2}}+\boldsymbol{x}+\boldsymbol{p}\big)\boldsymbol{r}-(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}+\boldsymbol{1})+p$$

$$=x^4r^4+x^2r^4+p^2r^4-2x^3r^4-2xpr^4+2x^2pr^4-\big(\boldsymbol{2x}^{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{3}}-\boldsymbol{2xr}^{\boldsymbol{3}}+\boldsymbol{2pr}^{\boldsymbol{3}}\big)\big(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{2}}+\boldsymbol{x}+\boldsymbol{p}\big)+\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{4}}\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{2}}+\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{2}}+\boldsymbol{p}^{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{2}}+\boldsymbol{2x}^{\boldsymbol{3}}\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{2}}+\boldsymbol{2x}^{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{pr}^{\boldsymbol{2}}+\boldsymbol{2xpr}^{\boldsymbol{2}}+\big(\boldsymbol{2x}^{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{2}}-\boldsymbol{2xr}^{\boldsymbol{2}}+\boldsymbol{2pr}^{\boldsymbol{2}}-\boldsymbol{2x}^{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{r}-\boldsymbol{2xr}-\boldsymbol{2pr}\big)(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}+\boldsymbol{1})+\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{2}}+\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{2}}+\boldsymbol{1}+\boldsymbol{2xr}+\boldsymbol{2r}+\boldsymbol{2x}-\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{2}}+\boldsymbol{xr}^{\boldsymbol{2}}-\boldsymbol{pr}^{\boldsymbol{2}}+\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{r}+\boldsymbol{xr}+\boldsymbol{pr}-\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}-\boldsymbol{1}+p$$

$$= x^4r^4 + x^2r^4 + p^2r^4 - 2x^3r^4 - 2xpr^4 + 2x^2pr^4 - \mathbf{2x^4r^3} + \mathbf{2x^3r^3} - \mathbf{2x^2pr^3} - \mathbf{2x^3r^3} + \mathbf{2x^2r^3} - \mathbf{2xpr^3} - \mathbf{2px^2r^3} + \mathbf{2pxr^3} - \mathbf{2p^2r^3} + \mathbf{x^4r^2} + \mathbf{x^2r^2} + \mathbf{p^2r^2} + \mathbf{2x^3r^2} + \mathbf{2x^2pr^2} + \mathbf{2xpr^2} + \mathbf{2x^3r^2} - \mathbf{2x^2r^2} + \mathbf{2pxr^2} - \mathbf{2x^3r} - \mathbf{2x^2r} - \mathbf{2pxr} + \mathbf{2x^2r^3} - \mathbf{2xr^3} + \mathbf{2pr^3} - \mathbf{2x^2r^2} - \mathbf{2xr^2} - \mathbf{2pr^2} + \mathbf{2x^2r^2} - \mathbf{2xr^2} + \mathbf{2pr^2} - \mathbf{2x^2r} - \mathbf{2xr} - \mathbf{2pr} + \mathbf{x^2} + \mathbf{r^2} + \mathbf{1} + \mathbf{2xr} + \mathbf{2r} + \mathbf{2x} - \mathbf{x^2r^2} + \mathbf{xr^2} - \mathbf{pr^2} + \mathbf{x^2r} + \mathbf{xr} + \mathbf{pr} - \mathbf{x} - \mathbf{r} - \mathbf{1} + p$$

$$= x^4r^4 - 2x^3r^4 + x^2r^4 + p^2r^4 - 2xpr^4 + 2x^2pr^4 - \mathbf{2x^4r^3} - \mathbf{4x^2pr^3} + \mathbf{4x^2r^3} - \mathbf{2p^2r^3} + \mathbf{x^4r^2} + \mathbf{p^2r^2} + \mathbf{4x^3r^2} + \mathbf{2x^2pr^2} + \mathbf{4xpr^2} - \mathbf{2x^2r^2} - \mathbf{2x^3r} - \mathbf{3x^2r} - \mathbf{2pxr} - \mathbf{2xr^3} + \mathbf{2pr^3} - \mathbf{4xr^2} - \mathbf{pr^2} - \mathbf{pr} + \mathbf{x^2} + \mathbf{r^2} + \mathbf{r} + \mathbf{x} + \mathbf{xr^2} + \mathbf{xr} + p$$

$$= x^4r^4 - 2x^3r^4 + x^2r^4 + p^2r^4 - 2xpr^4 + 2x^2pr^4 - \mathbf{2x^4r^3} - \mathbf{4x^2pr^3} + \mathbf{4x^2r^3} - \mathbf{2p^2r^3} + \mathbf{x^4r^2} + \mathbf{p^2r^2} + \mathbf{4x^3r^2} + \mathbf{2x^2pr^2} + \mathbf{4xpr^2} - \mathbf{2x^2r^2} - \mathbf{2x^3r} - \mathbf{3x^2r} - \mathbf{2pxr} - \mathbf{2xr^3} + \mathbf{2pr^3} - \mathbf{3xr^2} - \mathbf{pr^2} - \mathbf{pr} + \mathbf{x^2} + \mathbf{r^2} + \mathbf{r} + \mathbf{x} + \mathbf{xr} + p \quad (2)$$

Luego (1) y (2) son iguales, por lo tanto:

$$\big((r^2 - 2r + 1)x^2 + (r^2 - 2r + 1)p - (r^2x - x - r)\big) * \big(\mathbf{r^2x^2} - \mathbf{r(r+2)x} + \mathbf{pr^2} + \mathbf{r} + \mathbf{1}\big)$$
$$= \Big(\big(\mathbf{x^2} - \mathbf{x} + \mathbf{p}\big)\mathbf{r^2} - \big(\mathbf{x^2} + \mathbf{x} + \mathbf{p}\big)\mathbf{r} + (\mathbf{x} + \mathbf{r} + \mathbf{1})\Big)^2$$
$$- \Big(\big(\mathbf{x^2} - \mathbf{x} + \mathbf{p}\big)\mathbf{r^2} - \big(\mathbf{x^2} + \mathbf{x} + \mathbf{p}\big)\mathbf{r} + (\mathbf{x} + \mathbf{r} + \mathbf{1})\Big) + p$$

$$\big((r^2 - 2r + 1)x^2 + (r^2 - 2r + 1)p - (r^2x - x - r)\big) * u$$
$$= \Big(\big(\mathbf{x^2} - \mathbf{x} + \mathbf{p}\big)\mathbf{r^2} - \big(\mathbf{x^2} + \mathbf{x} + \mathbf{p}\big)\mathbf{r} + (\mathbf{x} + \mathbf{r} + \mathbf{1})\Big)^2$$
$$- \Big(\big(\mathbf{x^2} - \mathbf{x} + \mathbf{p}\big)\mathbf{r^2} - \big(\mathbf{x^2} + \mathbf{x} + \mathbf{p}\big)\mathbf{r} + (\mathbf{x} + \mathbf{r} + \mathbf{1})\Big) + p \quad (3)$$

Tenemos que:

$$\beta^2 + \beta + p = u^2s^2 - u\big(\mathbf{2}\big(\mathbf{x^2} - \mathbf{x} + \mathbf{p}\big)\mathbf{r^2} - \mathbf{2}\big(\mathbf{x^2} + \mathbf{x} + \mathbf{p}\big)\mathbf{r} + \mathbf{2}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) + \mathbf{1}\big)s + \big((r^2 - 2r + 1)x^2 + (r^2 - 2r + 1)p - (r^2x - x - r)\big) * u$$

Así:

$$\frac{\beta^2 + \beta + p}{f_1} = \frac{u^2s^2 - \big(\mathbf{2}\big(\mathbf{x^2} - \mathbf{x} + \mathbf{p}\big)\mathbf{r^2} - \mathbf{2}\big(\mathbf{x^2} + \mathbf{x} + \mathbf{p}\big)\mathbf{r} + \mathbf{2}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) + \mathbf{1}\big)u * s + \big((r^2 - 2r + 1)x^2 + (r^2 - 2r + 1)p - (r^2x - x - r)\big) * u}{u * s^2 - \big(\mathbf{2}\big(\mathbf{x^2} - \mathbf{x} + \mathbf{p}\big)\mathbf{r^2} - \mathbf{2}\big(\mathbf{x^2} + \mathbf{x} + \mathbf{p}\big)\mathbf{r} + \mathbf{2}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) + \mathbf{1}\big)s + (r^2 - 2r + 1)x^2 + (r^2 - 2r + 1)p - (r^2x - x - r)}$$

$$\frac{\beta^2 + \beta + p}{f_1} = \frac{u * \Big(u * s^2 - \big(\mathbf{2}\big(\mathbf{x^2} - \mathbf{x} + \mathbf{p}\big)\mathbf{r^2} - \mathbf{2}\big(\mathbf{x^2} + \mathbf{x} + \mathbf{p}\big)\mathbf{r} + \mathbf{2}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) + \mathbf{1}\big)s + (r^2 - 2r + 1)x^2 + (r^2 - 2r + 1)p - (r^2x - x - r)\Big)}{u * s^2 - \big(\mathbf{2}\big(\mathbf{x^2} - \mathbf{x} + \mathbf{p}\big)\mathbf{r^2} - \mathbf{2}\big(\mathbf{x^2} + \mathbf{x} + \mathbf{p}\big)\mathbf{r} + \mathbf{2}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) + \mathbf{1}\big)s + (r^2 - 2r + 1)x^2 + (r^2 - 2r + 1)p - (r^2x - x - r)}$$

$$\frac{\beta^2 + \beta + p}{f_1} = u$$

$$\frac{\beta^2 + \beta + p}{f_1} = \mathbf{r^2x^2} - \mathbf{r(r+2)x} + \mathbf{pr^2} + \mathbf{r} + \mathbf{1}$$

Así:

$$n^2+n+p=f_1\left(f_1(k-1)^2+(2\beta+1)(k-1)+\boldsymbol{r^2x^2}-\boldsymbol{r(r+2)x}+\boldsymbol{pr^2}+\boldsymbol{r}+\boldsymbol{1}\right)$$

Por lo tanto:
n^2+n+p es compuesto con $f_1=\boldsymbol{(rs\ -\ r\ +\ 1)^2\bullet x^2-(rs-r+1)(rs-r+2s-1)\bullet x+p\bullet(rs\ -\ r\ +\ 1)^2+(rs+s+1)(s-2)+r+2)}$
Y $f_2=f_1(k-1)^2+(2\beta+1)(k-1)+\boldsymbol{r^2x^2}-\boldsymbol{r(r+2)x}+\boldsymbol{pr^2}+\boldsymbol{r}+\boldsymbol{1}=\frac{n^2+n+p}{f_1}$

CASO 2

$$n=f_1(k+1)-(\beta+1)$$

Así:

$$n^2+n+p=(f_1(k+1)-(\beta+1))^2+f_1(k+1)-(\beta+1)+p$$

$$n^2+n+p={f_1}^2(k+1)^2-2f_1(\beta+1)(k+1)+(\beta+1)^2+f_1(k+1)-(\beta+1)+p$$

$$n^2+n+p=f_1\left(f_1(k+1)^2-2(\beta+1)(k+1)+(k+1)\right)+\beta^2+2\beta+1-\beta-1+p$$

$$n^2+n+p=f_1\left(f_1(k+1)^2-(2\beta+1)(k+1)+\frac{(\beta^2+\beta+p)}{f_1}\right)$$

Así:

$$n^2+n+p=f_1\left(f_1(k+1)^2-(2\beta+1)(k+1)+\boldsymbol{r^2x^2}-\boldsymbol{r(r+2)x}+\boldsymbol{pr^2}+\boldsymbol{r}+\boldsymbol{1}\right)$$

Por lo tanto:
n^2+n+p es compuesto con $f_1=\boldsymbol{(rs\ -\ r\ +\ 1)^2\bullet x^2-(rs-r+1)(rs-r+2s-1)\bullet x+p\bullet(rs\ -\ r\ +\ 1)^2+(rs+s+1)(s-2)+r+2)}$

Y $f_2=f_1(k+1)^2-(2\beta+1)(k+1)+\boldsymbol{r^2x^2}-\boldsymbol{r(r+2)x}+\boldsymbol{pr^2}+\boldsymbol{r}+\boldsymbol{1}=\frac{n^2+n+p}{f_1}$

Queda demostrado el Primer Teorema de la Factorización de Cordero en los números enteros.

Referencias bibliogràficas

Aznar, E. (2007). *Leonhard Euler Matemàtico (1707 Basilea, Suiza, 1783 San Petersburgo, Rusia).* https://www.ugr.es/~eaznar/euler.htm

Camacho, J. y Camacho, O. (2020). *Dos CientìficosBajo Un Fresno: Un Viaje A La Ciencia, En Doce Escritos.* Google Books.

Fernàndez, T. y Tamaro, E. (2004). *Adrien-Marie Legendre*. https://www.biografìas y vidas.com/biografìa/1/legendre.htm

Frases y Pensamientos. (s.f) *Frases de nùmeros primos.* https://www.frases y pensamientos.com.ar/frases-de-nùmeros-primos.html

R. Balister, B. Bollobás, R. Morris, *The sharp threshold for making squares*, Ann. Math. **188** (2018) 49-143.

C. Pomerance, *A Tale of Two Sieves,* Notices Amer. Math. Soc. **43** nº 12 (1996) 1473-1485.

Memorias de FIMAT. 2020. XII Festival Internacional de Matemáticas - XXII Congreso Nacional de Ciencias, Tecnología y Sociedad. Pàgs. 104-106

Biografìas y Vidas.com