Métodos Numéricos, un nuevo enfoque: *Método de Bisección*

MSc. Melania Corrales Mora
Docente Universitaria
melanycmgmai.com

Resumen

En épocas remotas, allá por los años 1600 A.C problemas matemáticos que actualmente son muy simples, no lo eran en ese entonces, por ejemplo, el caso de las raíces de la ecuación $x^2 = 2$, cuyas soluciones no fueron más que aproximaciones, y aunque dicha ecuación no estuviera escrita de esa forma explícita, se aprecia en papiros dichas aproximaciones a $\sqrt{2}$. Lo que permitía la obtención de dichos cálculos era el análisis numérico, que, aunque no tuviese su nombre como tal, permitió el desarrollo de lo que actualmente se denominan los Métodos Numéricos.

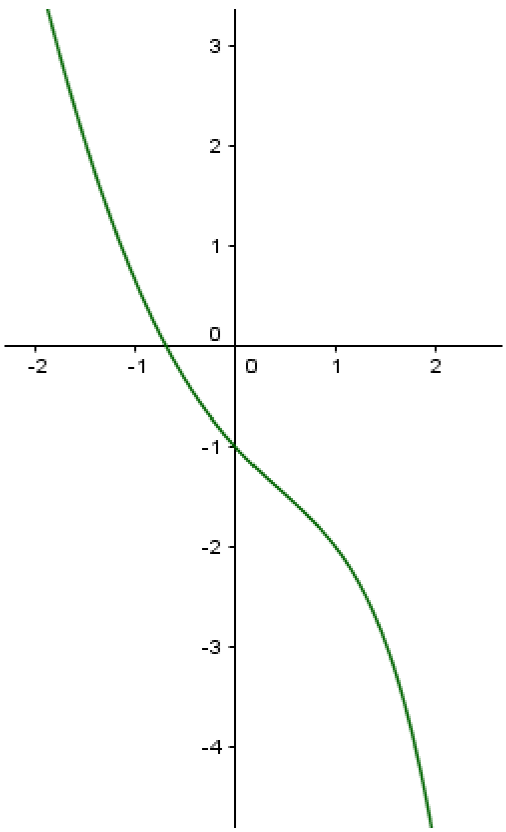
En este artículo académico, se pretende dejar de lado problemas tan triviales como las soluciones de ecuaciones polinómicas, que la mayoría de libros de Análisis Numérico utilizan para las ejemplificaciones, y nos centrarlos en ecuaciones cuyas soluciones resultan incluso difíciles para un computador, aquellas ecuaciones que involucran funciones trascendentes y cuya solución no se pueden dar si no es a través de métodos numéricos.

El método de bisección para determinar la aproximación de soluciones de ecuaciones de una variable, se basa en la demostración del Teorema de Bolzano.

Consideremos una ecuación f(x) = 0, para utilizar el método de bisección (y otros métodos) tomemos en cuenta sólo la función f(x), pero mantenemos el objetivo de encontrar una aproximación a la solución de f(x) =0

Primero se determina un intervalo en [a,b] que satisfaga el teorema de Bolzano, esto se puede hace en forma gráfica.

Para ir ejemplificando cada paso, se utilizará la función $f(x) = x^2 - 3^x$, si la graficamos, obtenemos



Podemos ver que el intervalo [-2,2], cumple el teorema de Bolzano, pero la idea del método de bisección es utilizar un intervalo bastante pequeño, en lo personal, prefiero utilizar intervalos que midan una o media unidad.
En este caso, elegiré el intervalo [-1,0], donde f es continua, f(-1) > 0 y f(0) < 0, por lo tanto satisface el teorema.

El método consiste en ir haciendo particiones medias del intervalo [a,b], considerando que el intervalo resultante debe igualmente cumplir el teorema de Bolzano. Es decir, una primera iteración será $p_1 = \frac{a+b}{2}$. Para aplicar la segunda iteración, se debe considerar en cuál de los dos subintervalos resultantes [a, p_1] o [p_1, b] se satisface el teorema de Bolzano para f, esto es sencillo porque se trata de verificar los signos de las imágenes. Es decir, si $f(a)*f(p_1) < 0$ se toma el primer subintervalo, si no, se toma el segundo que va a satisfacer $f(p_1)*f(b)<0$ y esto es excluyente, es decir, solo uno de los intervalos satisface esa condición.

Una vez definido el nuevo intervalo, se procede nuevamente a dividirlo para determina la segunda iteración p_2 y por su puesto el proceso continuará de esa misma manera para encontrar las siguientes iteraciones.

Volviendo al ejemplo de $f(x) = x^2 - 3^x$, en [-1,0] , tenemos que $p_1 = \frac{-1+0}{2} = -0.5$

Si comprobamos, f(-1)>0, f(-0.5)<0 y f(0)<0, entonces se toma el primer intervalo, es decir, p_1 sustituye a b pues sus imágenes tienen el mismo signo negativo.

Así $p_2 = \frac{-1-0.5}{2} = -0.75$ obtenemos la segunda iteración.

Para determinar una tercera iteración, buscamos el signo de la imagen de p_2, las otras ya las teníamos, y ya sea que se cambie a o se cambié p_1

En sí, el proceso continúa de esa manera, y para verlo completo, consideremos la siguiente tabla:

Iteraciones por el Método de Bisección de $f(x) = x^2 - 3^x$

ITERACIÓN	a	b	p	f(a)	f(b)	f(p)
1°	-1	0	-0.5	+	-	-
2°	-1	-0.5	-0.75	+	-	+
3°	-0.75	-0.5	-0.625	+	-	-
4°	-0.75	-0.625	-0.6875	+	-	+
5°	-0.6875	-0.625	-0.65625	+	-	-
6°	-0.6875	-0.65625	-0.671875	+	-	-
7°	-0.6875	-0.671875	-0.6796875	+	-	-

La tabla indica siete iteraciones que van dese p_1 = -0.5 hasta p_7 = -0.6796875, en las columnas de las imágenes se considera sólo el signo de las misma, pues es lo que interesa, los signos rojos en f(a) y f(b) indica que allí se hizo el cambio por el p correspondiente, puesto que en la iteración anterior daban igual signo. Y eso se puede ver en las columnas de a y b donde se ve en que parte el valor de p sustituye.

Recordemos que, el objetivo es aproximar la solución de f(x) = 0 y cada uno de los p son aproximaciones de las mismas, que claro está, entre más iteraciones, más aproximada a la solución real será.

Y si lo comparamos, $f(p_1) = f(-0.5) = (-0.5)^2 - 3^{-0.5} \sim -0.327350269189$ no se acerca mucho, mientras que $f(p_7) = f(-0.6796875) \sim 0.011946659618$, que ya aproxima con dos dígitos significativos. Necesitaríamos más iteraciones para que bride una mejor aproximación. (esta aun no convence)

El método en su forma algebraica:

Sea f una función continua en un intervalo cerrado [a, b] y tal que f(a)f(b)<0, entonces existe al menos un p ∈]a, b[tal que f(p) = 0.

Procedimiento:

Tomar → $\mathbf{a_1 = a} \quad \mathbf{b_1 = b} \qquad \mathbf{P_1 = \frac{1}{2}\,(a_1 + b_1)}$

Crear una sucesión de valores p $_1$, p $_2$, …, p $_n$ bajo las siguientes condiciones:

1) $$p_n = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad a_{n+1} = \begin{cases} a_n & \text{si } f(a_n)\cdot f(p_n) < 0 \\ p_n & \text{si } f(a_n)\cdot f(p_n) > 0 \end{cases}, \quad b_{n+1} = \begin{cases} b_n & \text{si } f(b_n)\cdot f(P_n) < 0 \\ p_n & \text{si } f(b_n)\cdot f(P_n) > 0 \end{cases}$$

<u>¿Cuándo detenerse para aproximar a una cifra significativa?</u>

La cota de error viene dada por

2) $$|p - p_n| < \frac{b-a}{2^{n+1}}$$

Así, que, si nos piden un error menor o igual a un r10^{-k} basta con resolver la inecuación
$$\frac{b-a}{2^{n+1}} \leqslant r10^{-k}$$

Recuerde que n es un número entero positivo y que el valor real de p, se supone que no lo conocemos.

Ejemplos:

1- Utilice el método de bisección para encontrar p_4 en la solución de $\ln(x) - x^2 + e^{x-2}$ 0 en el intervalo [2,6]

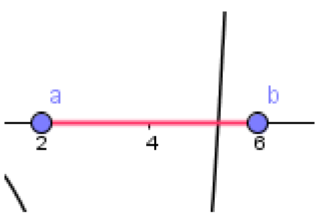
Resolver esa ecuación por métodos convencionales, en verdad es muy difícil, o si no, imposible, incluso al pedirle a GeoGebra su solución, ésta tampoco puede:

Resuelve[ln(x) - x² + e^(x - 2)=0]

→ ?

De allí la importancia de dejar de estudiar funciones polinómicas, como lo muestran la mayoría de libros, o simples funciones trascendentes como cos(x) o ln(x) y desarrollar el análisis numérico por medio de ejemplos que combinen dichas funciones y permitan apreciar la importancia y la utilidad de dichos algoritmos numéricos como herramienta única para la aproximación de raíces que son inaccesibles por métodos convencionales.

Así que se define la función ***f(x) =*** $\ln(x) - x^2 + e^{x-2}$ *donde gráficamente se puede observar que dicha función tiene un cero dentro del intervalo dado*



Y se puede considerar $a_1 = 2$ $b_1 = 6$ $p_1 = (2+6)/2 = 4$

A partir de allí se dan a_2 b_2 y p_2 calculando los calores de $f(a_1)$, $f(b_1)$ y $f(p_1)$ donde p_1 llegará a sustituir en la segunda secuencia a aquel que diera igual signo a $f(p_1)$, según 1)

Se puede hacer en una hoja de cálculo en GeoGebra, pero usted puedo comprobarlo en su calculadora. Lo insto a corroborarlo en GeoGebra también.

Hoja de Cálculo

	a_n	b_n	p_n
1	2	6	4
2	4	6	5
3	5	6	5.5

dón,

Así el valor de p_4 que andaba buscando corresponde a 5.25.

¿Qué tanto se aproximará ese valor a la solución real?

Por la inecuación de 2) sabemos que el error absoluto es menor a

$$\frac{b-a}{2^{n+1}} = \frac{6-2}{2^{4+1}} = \frac{4}{32} = 0.125 < 5*10^{-1}$$

Lo que nos indica que hay apenas una cifra significativa (lo aproxima muy poquito)

2- Para la ecuación e intervalo anterior, ¿Cuántas iteraciones se necesitan para tener un error absoluto menos a 10^{-5}?

Para ello debemos resolver la inecuación de 2, donde

$$|p - p_n| < \frac{b-a}{2^{n+1}} \leqslant 10^{-5}$$

Sustituyendo los valores de a y b, tenemos

$$\frac{6-2}{2^{n+1}} \leqslant 10^{-5}$$ *Y resolviendo llegamos a que n > 17. 60… es decir n= 18*

Así que se necesita calcular al menos p_{18} para obtener dicho error absoluto

	a	b	p
1	2	6	4
2	4	6	5
⋮	⋮	⋮	⋮
17	5.25726318359375	5.25732421875	5.257293701171875
18	5.257293701171875	5.25732421875	5.257308959960938

Los ejemplos muestran cómo poder hacer uso de la tecnología actual, y dejar la obsolescencia de la enseñanza de los métodos numéricos que ha utilizado funciones que se resuelven por métodos más simples y tradiciones, para sustituirlas por ecuaciones que involucren diferentes funciones trascendentes y permita una mayor significancia de los métodos que se enseñar.

La principal fuente del uso de los algoritmos numéricos son los softwares matemáticos, entre ellos MATLAB, puesto en uso en el año 1984, y por eso fue la principal herramienta que se utilizaba en la enseñanza de los métodos numéricos para la programación de los diferentes algoritmos y todavía sigue siendo una herramienta muy poderosa, pero que requiere de la compra de una costosa licencia, por lo que no está al alcance de todos.

Pero la tecnología también ha avanzado significativamente desde que se establecieron dichos programas, de manera que la existencia de nuevos softwares, que presentan una mayor dinamicidad, en las que se pueden mostrar en forma conjunto, el método en su forma gráfica, el algoritmo en su forma algebraica y numérica y el cálculo ágil de los diferentes errores, desde una perspectiva más estética y con la principal razón de poder adquirir software de uso libre y gratuito, tal es el caso de GeoGebra.

Es así como GeoGebra, se puede convertir en una herramienta de fácil acceso para todos que permita agilizar la enseñanza de los métodos numéricos, puesto que no pone limitaciones, y permite, al igual que otros softwares matemáticos, la programación de dichos algoritmos para cualquier ecuación dada.